פיזיקה תרמית:
פתרון מבחן מועד א' תש"ע

גרסה 1.0, יולי 2011

ברק שושני
baraksh@gmail.com | http://baraksh.co.il/

חלק א'

שאלה 1

לאטום פחמן נייטרלי יש מצב יסוד עם ניוון 9. למצב המעורר הראשון ניוון 5 ואנרגיה של $0.82\,\mathrm{eV}$ מעל מצב היסוד. במדידות ספקטרוסקופיות של כוכב מרוחק נמצא כי 10% מאטומי הפחמן הנייטרלי נמצאים במצב המעורר. מספר האטומים ברמות גבוהות יותר ניתן להזנחה. מהי בערך טמפרטורת הכוכב, בהנחה שהוא בשיווי משקל תרמי?

פתרון

תהי ε_0 האנרגיה במצב היסוד ו־$\varepsilon_0+\Delta\varepsilon$ האנרגיה במצב המעורר הראשון (כאשר $\Delta\varepsilon = 0.82\,\mathrm{eV}$). פונקציית החלוקה היא:

$$Z(\tau) = 9\,\mathrm{e}^{-\varepsilon_0/\tau} + 5\,\mathrm{e}^{-(\varepsilon_0+\Delta\varepsilon)/\tau}$$

לכן ההסתברות שאטום יהיה במצב המעורר היא:

$$P(\varepsilon_0+\Delta\varepsilon) = \frac{5\,\mathrm{e}^{-(\varepsilon_0+\Delta\varepsilon)/\tau}}{9\,\mathrm{e}^{-\varepsilon_0/\tau} + 5\,\mathrm{e}^{-(\varepsilon_0+\Delta\varepsilon)/\tau}} = 10\% = 0.1$$

נצמצם את אנרגיית היסוד:

$$\frac{5\,\mathrm{e}^{-\Delta\varepsilon/\tau}}{9+5\,\mathrm{e}^{-\Delta\varepsilon/\tau}} = \frac{5}{9\,\mathrm{e}^{\Delta\varepsilon/\tau}+5} = 0.1$$

מכאן $\mathrm{e}^{\Delta\varepsilon/\tau} = 5$, ולכן:

$$\tau = \frac{\Delta\varepsilon}{\log 5} \approx 0.5\,\mathrm{eV}$$

נחלק בקבוע בולצמן כדי לקבל את הטמפרטורה במעלות קלווין:

$$\boxed{T = \frac{\tau}{k_B} \approx 5800\,\mathrm{K}} \qquad \square$$

שאלה 2

צפיפות אלקטרוני ההולכה בנחושת היא $8.5 \times 10^{28}\,\mathrm{m}^{-3}$, ומסת האלקטרון היא $9.1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$.

א. מהי הרמה המאוכלסת הגבוהה ביותר ב־$\tau = 0$?

ב. הנחושת מחוממת לטמפרטורה של $1160\,\mathrm{K}$. כמה אלקטרונים בממוצע נמצאים ברמה שהיא $0.1\,\mathrm{eV}$ מעל האנרגיה שמצאתם בסעיף א'?

פתרון

הרמה המאוכלסת הגבוהה ביותר כאשר $\tau = 0$ נקבעת לפי אנרגיית פרמי:

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2 n\right)^{2/3} \approx 7.05\,\mathrm{eV}$$

כאשר n היא הצפיפות ו־m היא המסה. מספר החלקיקים הממוצע בטמפרטורה $T = 1160\,\mathrm{K}$ ($\tau = 0.1\,\mathrm{eV}$) במצב בעל אנרגיה $\varepsilon - \mu = 0.1\,\mathrm{eV}$ נקבע לפי התפלגות פרמי־דיראק:

$$\boxed{f\left(\varepsilon\right) = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon-\mu}{\tau}\right)+1} = \frac{1}{\mathrm{e}+1} \approx 0.27}$$

□

שאלה 3

נתונים שני לוחות אינסופיים המוחזקים בטמפרטורות שונות: $T_{\mathrm{cold}} < T_{\mathrm{hot}}$. בין שני הלוחות יש ריק. מכניסים לוח שלישי דק מאוד המבודד מהסביבה. פי כמה ירד או יעלה קצב פליטת החום נטו מהלוח החם ללוח הקר כתוצאה מהכנסת הלוח הדק ביניהם?

פתרון

האנרגיה ליחידת שטח הנפלטת ע"י כל לוח היא $J = \sigma_B T^4$, כאשר σ_B הוא קבוע סטפן־בולצמן. לפני הכנסת הלוח האמצעי, קצב פליטת החום נטו מהלוח החם ללוח הקר הוא:

$$J_1 = \sigma_B\left(T_{\mathrm{hot}}^4 - T_{\mathrm{cold}}^4\right)$$

תהי T טמפרטורת הלוח האמצעי. הוא קולט ופולט קרינה בשני הכיוונים, ולכן:

$$2\sigma_B T^4 = \sigma_B\left(T_{\mathrm{hot}}^4 + T_{\mathrm{cold}}^4\right) \quad\Longrightarrow\quad T^4 = \frac{T_{\mathrm{hot}}^4 + T_{\mathrm{cold}}^4}{2}$$

לפיכך אחרי הכנסת הלוח האמצעי, קצב פליטת החום מהלוח החם ללוח הקר יהיה:

$$J_2 = \sigma_B\left(T_{\mathrm{hot}}^4 - T^4\right) = \sigma_B\left(\frac{T_{\mathrm{hot}}^4 - T_{\mathrm{cold}}^4}{2}\right) = \frac{1}{2}J_1$$

כלומר, קצב פליטת החום מהלוח החם <u>יקטן פי 2</u>. □

שאלה 4

אילו מהמשפטים הבאים לא נכונים:

א. מים ואדים נמצאים במיכל בטמפרטורה של $100\,^\circ\mathrm{C}$ בלחץ של $1\,\mathrm{atm}$. אם הטמפרטורה נשמרת קבועה ונפח המיכל מוקטן מעט, הלחץ יגדל מעט.

ב. אם שתי מערכות מבודדות נמצאות במגע תרמי ודיפוזיוני במהלך הגעה לשיווי משקל, החלקיקים ינועו מהפוטנציאל הכימי הגבוה לנמוך.

ג. אם מקררים גז אידאלי (חסר אינטראקציה) לטמפרטורה אפס אזי האנרגיה יורדת לאפס.

ד. נתונה מערכת מבודדת הנשמרת בטמפרטורה ולחץ קבועים. המערכת תגיע לשיווי משקל כאשר אנרגיית גיבס מינימלית.

ה. גז אידאלי קלאסי מפר את החוק השלישי של התרמודינמיקה.

ו. נגד מחובר לסוללה חשמלית ומחמם מים מטמפרטורה התחלתית של $100\,^\circ\mathrm{C}$. האדים מפעילים מטען הטוען חזרה את הסוללה וכך מתעבים חזרה למים החוזרים למיכל. התהליך יכול להתבצע לאט כרצוננו וברכיבים אידאליים (אין בזבוזי אנרגיה במערכת והיא כולה מבודדת לחלוטין מהסביבה). אין תכנון של המערכת בו היא יכולה להמשיך ולפעול עד אין קץ.

פתרון

א. לא נכון: הטמפרטורה הקריטית של מים היא $647.1\,\mathrm{K}$, לפיכך אנו נמצאים מתחת לטמפרטורה הקריטית, באזור הדו־פאזתי בו הלחץ קבוע, אך הנפח עשוי להשתנות.

ב. נכון: זוהי הגדרת הפוטנציאל הכימי.

ג. לא נכון: לא כתוב שהגז הוא גז אידאלי קלאסי. אם הוא גז פרמיונים, למשל, אז בטמפרטורה אפס האנרגיה תהיה אנרגיית פרמי.

ד. נכון: זה נובע ישירות מהגדרת אנרגיית גיבס.

ה. נכון: החוק השלישי של התרמודינמיקה קובע כי האנטרופיה של המערכת מתקרבת לערך קבוע כאשר הטמפרטורה מתקרבת לאפס. גז אידאלי מקיים את **משוואת Sackur-Tetrode**:

$$\sigma = N\left(\log\frac{n_Q}{n}+\frac{5}{2}\right) = N\left(C+\frac{3}{2}\log\tau\right)$$

כאשר C הוא קבוע. מתקיים $\sigma(0)\to-\infty$, לפיכך החוק השלישי מופר. (אף גז הוא לא באמת גז אידאלי, לכן אין כאן בעיה.)

ו. נכון: לא יכול להיות תכנון של המערכת בו היא יכולה להמשיך ולפעול עד אין קץ, מכיוון שגם במצב אידאלי יעילות התהליך לא יכולה להיות גבוהה יותר מיעילות קרנו. □

שאלה 5

לסידן פחמתי $\mathrm{CaCO_3}$ שתי צורות גבישיות נפוצות: קלציט וארגוניט. נתונה טבלת נתונים בטמפרטורת החדר ובלחץ אטמוספרי עבור שתי הפאזות של אנרגיית גיבס, נפח ואנטרופיה פר מול של חומר:

	$G\,[\mathrm{kJ\,mol^{-1}}]$	$V\,[\mathrm{cm^3\,mol^{-1}}]$	$S\,[\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}]$
קלציט	-1128.8	36.93	92.9
ארגוניט	-1127.8	34.14	88.7

מי היא הפאזה היציבה בתנאים אלה, ובאיזה לחץ בערך (בטמפרטורת החדר) הפאזה השנייה תהיה יציבה יותר?

פתרון

הפאזה היציבה היא קלציט, מכיוון שאנרגיית גיבס שלה נמוכה יותר. למציאת הלחץ בו ארגוניט תהיה יציבה יותר, נשים לב כי אנרגיית גיבס מקיימת את הקשר:

$$\mathrm{d}G = \mu\,\mathrm{d}N - \sigma\,\mathrm{d}\tau + V\,\mathrm{d}p$$

בטמפרטורה קבועה ומספר חלקיקים קבוע נקבל $\mathrm{d}G = V\,\mathrm{d}p$. נבדוק מתי אנרגיות גיבס של שתי הפאזות משתוות:

$$G_C + V_C\Delta p = G_A + V_A\Delta p \quad\Longrightarrow\quad \frac{G_A-G_C}{V_C-V_A} = \Delta p$$

כאשר C מתייחס לקלציט ו־A לארגוניט. מכאן:

$$\boxed{\Delta p = \frac{1\,\mathrm{kJ\,mol^{-1}}}{2.79\,\mathrm{cm^3\,mol^{-1}}} \approx 3537\,\mathrm{atm}}$$

□

שאלה 6

גז חנקן דליל דו־אטומי נדחס לאט בטמפרטורה קבועה מנפח התחלתי של $0.3\,\mathrm{m}^3$ לנפח סופי של $0.1\,\mathrm{m}^3$. מספר מולקולות החנקן הוא 10^{24}. פי כמה השתנה מספר המצבים המיקרוסקופיים של הגז בתהליך?

פתרון

האנטרופיה היא הלוגריתם של מספר המצבים, $\sigma \equiv \log g$, ולכן $g = \mathrm{e}^\sigma$. ממשוואת Sackur-Tetrode, האנטרופיה של גז אידאלי היא:

$$\sigma = N\left(\log\frac{n_Q}{n} + \frac{5}{2}\right) = N\left(C + \log V\right)$$

כאשר C קבוע. לפיכך מספר המצבים הוא:

$$g = \mathrm{e}^{NC}\,V^N$$

אם נקטין את הנפח פי 3, מספר המצבים <u>יקטן פי $3^N = 3^{\left(10^{24}\right)}$</u>. □

חלק ב'

שאלה 1

מוליך־על בשדה מגנטי

כאשר מוליך־על (מסוג ראשון) נמצא תחת השפעת שדה מגנטי חיצוני, השדה המגנטי נדחה מן החומר מוליך־העל עד שהשדה מגיע לערך קריטי הנקרא גם השדה הקריטי $H_c\left(\tau\right)$. עבור $H > H_c$ החומר הופך למתכת רגילה (מצב נורמלי) ועבור $H < H_c$ החומר במצב מוליך־על.

נתון כי צורת קו הדו־קיום (השדה הקריטי) המפריד את הפאזה הנורמלית והפאזה מוליכת־העל של חומר מסוים היא פרבולה, והיא ניתנת כפונקציה של הטמפרטורה על־ידי:

$$H_c\left(\tau\right) = H_0\left(1 - \left(\frac{\tau}{\tau_c}\right)^2\right)$$

א. קבלו משוואה אנלוגית למשוואת קלאוזיוס־קלפיירון עבור קו הדו־קיום.

ב. השתמשו בעובדה שבתוך מוליך־העל השדה $B = 0$ ובקשר $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{m}$ כדי לחשב את החום הכמוס ליחידת נפח במעבר בין המצב מוליך־העל למצב הנורמלי כפונקציה של τ.

ג. השתמשו בקשר $C_H = \tau\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\tau}\right)_H$ כדי למצוא את הקפיצה בקיבול החום הסגולי ליחידת נפח כאשר חוצים את קו הדו־קיום בשדה קבוע.

פתרון סעיף א'

כדי לפתח את משוואת קלאוזיוס־קלפיירון, נתחיל מהיחס (יחס גיבס־דוהם):

$$\mathrm{d}\mu = -s\,\mathrm{d}\tau + v\,\mathrm{d}p$$

המתקיים עבור כל אחת מהפאזות בנפרד, כאשר μ הוא הפוטנציאל הכימי, $s \equiv \sigma/N$ היא האנטרופיה למולקולה, τ היא הטמפרטורה, $v \equiv V/N$ הוא הנפח למולקולה, p הוא הלחץ ו־N הוא מספר המולקולות. על קו הדו־קיום מתקיים $\mathrm{d}\mu_1 = \mathrm{d}\mu_2$, לכן:

$$-s_1\,\mathrm{d}\tau + v_1\,\mathrm{d}p = -s_2\,\mathrm{d}\tau + v_2\,\mathrm{d}p$$

מכאן:

$$\left(v_1 - v_2\right)\,\mathrm{d}p = \left(s_1 - s_2\right)\mathrm{d}\tau$$

ולפיכך:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\Delta s}{\Delta v}$$

נחליף את הלחץ p בשדה המגנטי H ואת הנפח v במגנטיזציה $-m$, ונקבל:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\tau}=-\frac{\Delta s}{\Delta m}}$$

□

פתרון סעיף ב'

החום הכמוס מוגדר כך:

$$L\equiv\tau\Delta s$$

לפי המשוואה מסעיף א':

$$\Delta s=-\Delta m\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\tau}\quad\Longrightarrow\quad L=-\tau\Delta m\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\tau}$$

נתון כי:

$$H_c\left(\tau\right)=H_0\left(1-\left(\frac{\tau}{\tau_c}\right)^2\right)$$

לכן:

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\tau}=-H_0\frac{2\tau}{\tau_c^2}$$

בנוסף, במצב מוליך־העל מתקיים:

$$B=H+4\pi m=0\quad\Longrightarrow\quad m=-\frac{H}{4\pi}$$

ובמצב הנורמלי מתקיים:

$$B=H+4\pi m=H\quad\Longrightarrow\quad m=0$$

לפיכך:

$$\Delta m=\frac{H}{4\pi}=\frac{H_0}{4\pi}\left(1-\left(\frac{\tau}{\tau_c}\right)^2\right)$$

ובסה"כ נקבל:

$$\boxed{L=\frac{H_0^2}{2\pi}\left(\left(\frac{\tau}{\tau_c}\right)^2-\left(\frac{\tau}{\tau_c}\right)^4\right)}$$

□

פתרון סעיף ג'

מתוך הקשר $C_H = \tau \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\tau}\right)_H$ נקבל:

$$\begin{aligned}
\Delta C_H &= \tau \frac{\partial \Delta\sigma}{\partial\tau} \\
&= \tau \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{L}{\tau}\right) \\
&= \tau \frac{\frac{\partial L}{\partial\tau}\tau - L}{\tau^2} \\
&= \frac{\partial L}{\partial\tau} - \frac{L}{\tau} \\
&= \frac{H_0^2}{2\pi}\left(\frac{2\tau}{\tau_c^2} - \frac{4\tau^3}{\tau_c^4}\right) - \frac{H_0^2}{2\pi}\left(\frac{\tau}{\tau_c^2} - \frac{\tau^3}{\tau_c^4}\right) \\
&= \boxed{\frac{H_0^2}{2\pi}\left(\frac{\tau}{\tau_c^2} - \frac{3\tau^3}{\tau_c^4}\right)}
\end{aligned}$$

$\square$

שאלה 2

שדה חיצוני

מוצק שבו אטומים בעלי ספין $1/2$ (חסרי אינטראקציה הדדית) נמצא בשדה מגנטי $B = 3\,\mathrm{T}$. המומנט המגנטי הוא $\mu = 9.3\times10^{-23}\,\mathrm{J\,T^{-1}}$.

א. מהי הטמפרטורה אשר מתחתיה יותר מ־75% ספין מקביל לשדה?

ב. קליטה של קרינה אלקטרומגנטית יכולה לעורר מעבר בין שתי רמות האנרגיה אם תדירות הקרינה היא $f = 2\mu B/h$ כאשר h קבוע פלאנק. נניח כי המוצק בשיווי משקל תרמי וכן $\tau \gg \mu B$, והוא מוקרן בקרינה כזו. מהי התלות בטמפרטורה של ההספק הנקלט במוצק?

פתרון סעיף א'

אטום יכול להיות בעל אנרגיה $-\mu B$, אם הספין שלו מקביל לשדה, או μB, אם הספין שלו מנוגד לשדה. לפיכך פונקציית החלוקה היא:

$$Z = \mathrm{e}^{-\mu B/\tau} + \mathrm{e}^{\mu B/\tau}$$

הסיכוי של אטום להיות עם ספין מקביל לשדה יהיה, אם כן:

$$P\left(-\mu B\right) = \frac{\mathrm{e}^{\mu B/\tau}}{\mathrm{e}^{-\mu B/\tau} + \mathrm{e}^{\mu B/\tau}} = 75\% = \frac{3}{4}$$

לפיכך:

$$\mathrm{e}^{-2\mu B/\tau} = \frac{1}{3} \quad\Longrightarrow\quad \tau = \frac{2\mu B}{\log 3} = 5.08\times10^{-22}\,\mathrm{J}$$

נחלק בקבוע בולצמן כדי למצוא את הטמפרטורה:

$$\boxed{T = \frac{\tau}{k_B} = 36.8\,\mathrm{K}}$$

$\square$

פתרון סעיף ב'

באמצעות קליטת פוטון בעל אנרגיה $2\mu B$, האטום יכול לעבור מרמת אנרגיה $-\mu B$ (ספין מקביל לשדה) לרמת אנרגיה μB. הסיכוי שזה יקרה הוא, כפי שראינו:

$$P\left(-\mu B\right)=\frac{\mathrm{e}^{\mu B/\tau}}{\mathrm{e}^{-\mu B/\tau}+\mathrm{e}^{\mu B/\tau}}=\frac{1}{\mathrm{e}^{-2\mu B/\tau}+1}$$

אם $\mu B\ll\tau$ אז $\mu B/\tau\to0$ ולכן נוכל לרשום:

$$P\left(-\mu B\right)\approx\frac{1}{\left(1-2\mu B/\tau\right)+1}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\mu B/\tau}\approx\frac{1}{2}\left(1+\frac{\mu B}{\tau}\right)$$

ההספק הנקלט במוצק תלוי בהסתברות לעירור, ולכן <u>התלות בטמפרטורה תהיה $1/\tau$</u>. □

שאלה 3

חלקיקים אחרים

נתונים N חלקיקים שלכל אחד מהם 3 מצבי אנרגיה אפשריים: $0,\varepsilon,2\varepsilon$. למערכת נפח קבוע V והיא מצומדת לאמבט חום בטמפרטורה τ. אין אינטראקציה בין החלקיקים, והסטטיסטיקה הרלוונטית היא סטטיסטיקת בולצמן.

א. כתבו את פונקציית החלוקה עבור חלקיק יחיד.

ב. מהי האנרגיה הממוצעת שלו?

ג. בגבול $\varepsilon\ll\tau$, מהי ההסתברות שהרמה המעוררת העליונה מאוכלסת ומהי האנרגיה הממוצעת?

ד. באיזו טמפרטורה יש במצב היסוד פי 1.1 חלקיקים מברמה העליונה?

ה. מצאו את קיבול החום הסגולי. נתחו תשובותיכם בגבול $\varepsilon\ll\tau$ ו־$\varepsilon\gg\tau$. שרטטו באופן סכמטי את קיבול החום כפונקציה של τ.

פתרון סעיף א'

הפונקציה היא:

$$\boxed{Z=1+\mathrm{e}^{-\varepsilon/\tau}+\mathrm{e}^{-2\varepsilon/\tau}}$$ □

פתרון סעיף ב'

האנרגיה הממוצעת היא:

$$\boxed{U=\frac{\varepsilon\,\mathrm{e}^{-\varepsilon/\tau}+2\varepsilon\,\mathrm{e}^{-2\varepsilon/\tau}}{1+\mathrm{e}^{-\varepsilon/\tau}+\mathrm{e}^{-2\varepsilon/\tau}}}$$ □

פתרון סעיף ג'

כאשר $\varepsilon\ll\tau$ ההבדל בין שלוש רמות האנרגיה זניח, לכן כל רמה תהיה מאוכלסת במספר שווה של חלקיקים. לפיכך <u>$P\left(2\varepsilon\right)=1/3$ ו־$U=\varepsilon$</u>. □

פתרון סעיף ד'

ההסתברות למצוא חלקיק במצב היסוד היא:

$$P\left(0\right)=\frac{1}{Z}$$

וברמה העליונה:

$$P\left(2\varepsilon\right)=\frac{\mathrm{e}^{-2\varepsilon/\tau}}{Z}$$

נדרוש שהיחס יהיה 1.1 ונקבל:

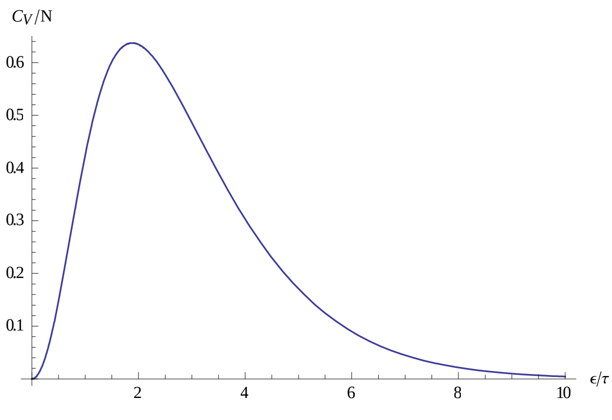
$$1.1=\frac{P\left(0\right)}{P\left(2\varepsilon\right)}=\frac{1}{\mathrm{e}^{-2\varepsilon/\tau}}\quad\Longrightarrow\quad\boxed{\tau=\frac{2\varepsilon}{\log 1.1}}\qquad\square$$

פתרון סעיף ה'

קיבול החום בנפח קבוע הוא:

$$\begin{aligned}
C_V &\equiv \left(\frac{\partial U}{\partial\tau}\right)_V\\
&= \frac{\partial}{\partial\tau}\left(N\frac{\varepsilon\,\mathrm{e}^{-\varepsilon/\tau}+2\varepsilon\,\mathrm{e}^{-2\varepsilon/\tau}}{1+\mathrm{e}^{-\varepsilon/\tau}+\mathrm{e}^{-2\varepsilon/\tau}}\right)\\
\left(\beta\equiv\frac{1}{\tau}\right)\quad &= -\beta^2\frac{\partial}{\partial\beta}\left(N\frac{\varepsilon\,\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon}+2\varepsilon\,\mathrm{e}^{-2\beta\varepsilon}}{1+\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon}+\mathrm{e}^{-2\beta\varepsilon}}\right)\\
&= -\beta^2 N\frac{\left(-\varepsilon^2\,\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon}-4\varepsilon^2\,\mathrm{e}^{-2\beta\varepsilon}\right)\left(1+\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon}+\mathrm{e}^{-2\beta\varepsilon}\right)-\left(\varepsilon\,\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon}+2\varepsilon\,\mathrm{e}^{-2\beta\varepsilon}\right)\left(-\varepsilon\,\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon}-2\varepsilon\,\mathrm{e}^{-2\beta\varepsilon}\right)}{\left(1+\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon}+\mathrm{e}^{-2\beta\varepsilon}\right)^2}\\
&= \beta^2\varepsilon^2 N\frac{\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon}+4\,\mathrm{e}^{-2\beta\varepsilon}+\mathrm{e}^{-3\beta\varepsilon}}{\left(1+\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon}+\mathrm{e}^{-2\beta\varepsilon}\right)^2}\\
&= \boxed{\frac{N\varepsilon^2}{\tau^2}\frac{\mathrm{e}^{-\varepsilon/\tau}+4\,\mathrm{e}^{-2\varepsilon/\tau}+\mathrm{e}^{-3\varepsilon/\tau}}{\left(1+\mathrm{e}^{-\varepsilon/\tau}+\mathrm{e}^{-2\varepsilon/\tau}\right)^2}}
\end{aligned}$$

והוא נראה כך:



בגבול $\varepsilon\gg\tau$ נקבל $\varepsilon/\tau\to 0$ ולכן האקספוננטים הם בקירוב 1:

$$C_V\to\frac{N\varepsilon^2}{\tau^2}\frac{1+4+1}{\left(1+1+1\right)^2}=\boxed{\frac{2N\varepsilon^2}{3\tau^2}}$$

בגבול $\varepsilon\ll\tau$ נקבל $\varepsilon/\tau\to\infty$ ולכן האקספוננטים מתאפסים בקירוב:

$$C_V=\frac{N\varepsilon^2\,\mathrm{e}^{-\varepsilon/\tau}}{\tau^2}\frac{1+4\,\mathrm{e}^{-\varepsilon/\tau}+\mathrm{e}^{-2\varepsilon/\tau}}{\left(1+\mathrm{e}^{-\varepsilon/\tau}+\mathrm{e}^{-2\varepsilon/\tau}\right)^2}\to\boxed{\frac{N\varepsilon^2\,\mathrm{e}^{-\varepsilon/\tau}}{\tau^2}}\qquad\square$$