

קוונטים 1: פתרון מבחן לדוגמה תשע"א

גרסה 1.0, יולי 2011

ברק שושני
baraksh@gmail.com | http://baraksh.co.il/

חלק א'

שאלה 1

נתונה פונקציית הגל המנורמלת:

$$\psi(\mathbf{r}) = N(Y_{1,1}(\theta, \varphi) - iY_{1,0}(\theta, \varphi) + 2Y_{1,-1}(\theta, \varphi))$$

כאשר $Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)$ הן ההרמוניות הכדוריות ו- N קבוע.

א. מצאו את הקבוע N .

ב. חשבו את ערך התצפית $\langle \psi | \hat{L}_x^2 | \psi \rangle$, כאשר L_x הוא רכיב x של התנע הזוויתי.

פתרון סעיף א'

בסימון ברה־קט, פונקציית הגל היא:

$$|\psi\rangle = N(|1, +1\rangle - i|1, 0\rangle + 2|1, -1\rangle)$$

כאשר $|\ell, m\rangle$ הם המצבים העצמיים של התנע הזוויתי, אשר מקיימים את יחס האורתונורמליות:

$$\langle \ell', m' | \ell, m \rangle = \delta_{\ell'\ell} \delta_{m'm}$$

תנאי הנורמליזציה יהיה, אם כן:

$$\begin{aligned} 1 &= \langle \psi | \psi \rangle \\ &= (\langle 1, -1 | 2 + \langle 1, 0 | i + \langle 1, +1 |) N^* N (|1, +1\rangle - i|1, 0\rangle + 2|1, -1\rangle) \\ &= |N|^2 (4 + 1 + 1) \\ &= 6|N|^2 \end{aligned}$$

ולכן:

□

$$N = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

פתרון סעיף ב'

בייצוג וקטורי, הקטים העצמיים הם:

$$|1, +1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1, 0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1, -1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}} (|1, +1\rangle - i|1, 0\rangle + 2|1, -1\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

בנוסף, האופרטור \hat{L}_x הוא:

$$\hat{L}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

לפיכך:

$$\hat{L}_x^2 = \frac{\hbar^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

וכעת נוכל לחשב את ערך התצפית:

$$\begin{aligned} \langle \psi | \hat{L}_x^2 | \psi \rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}} (1 \quad i \quad 2) \frac{\hbar^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar^2}{12} (1 \quad i \quad 2) \begin{pmatrix} 3 \\ -2i \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar^2}{12} (1 + 2 + 6) \\ &= \frac{3\hbar^2}{4} \end{aligned}$$

□

שאלה 2

נתון מצב של 3 חלקיקים בעלי ספין $\frac{1}{2}$ הניתנים להבחנה:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+++ \rangle + |-- \rangle)$$

המצב רשום בבסיס z של החלקיקים.

נגדיר את האופרטורים:

$$\hat{A} \equiv \sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} \sigma_x^{(3)}, \quad \hat{B} \equiv \sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} \sigma_y^{(3)}, \quad \hat{C} \equiv \sigma_x^{(1)} \sigma_y^{(2)} \sigma_y^{(3)}, \quad \hat{D} \equiv \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} \sigma_y^{(3)}$$

כאשר $\sigma_i^{(j)}$ היא מטריצת פאולי בכיוון $i = x, y, z$ המשויכת לחלקיק $j = 1, 2, 3$.

עבור אילו מהאופרטורים $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$ המצב $|\psi\rangle$ הוא מצב עצמי, ומהם הערכים העצמיים המתאימים לו עבור אופרטורים אלה?

$$\sigma_x |+\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |-\rangle$$

$$\sigma_x |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |+\rangle$$

$$\sigma_y |+\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = +i|-\rangle$$

$$\sigma_y |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix} = -i|+\rangle$$

נפעיל את האופרטורים על $|\psi\rangle$:

$$\begin{aligned} \hat{A}|\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_x^{(1)}\sigma_x^{(2)}\sigma_x^{(3)}(|++\rangle + |--\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_x^{(1)}\sigma_x^{(2)}(\sigma_x^{(3)}|++\rangle + \sigma_x^{(3)}|--\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_x^{(1)}(\sigma_x^{(2)}|+-\rangle + \sigma_x^{(2)}|-+\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x^{(1)}|+-\rangle + \sigma_x^{(1)}|-+\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|--\rangle + |++\rangle) \\ &= |\psi\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{B}|\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_x^{(1)}\sigma_x^{(2)}\sigma_y^{(3)}(|++\rangle + |--\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_x^{(1)}\sigma_x^{(2)}(\sigma_y^{(3)}|++\rangle + \sigma_y^{(3)}|--\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_x^{(1)}(i\sigma_x^{(2)}|+-\rangle - i\sigma_x^{(2)}|-+\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(i\sigma_x^{(1)}|+-\rangle - i\sigma_x^{(1)}|-+\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}i(|--\rangle - |++\rangle) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{C}|\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_x^{(1)}\sigma_y^{(2)}\sigma_y^{(3)}(|++\rangle + |--\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_x^{(1)}\sigma_y^{(2)}(\sigma_y^{(3)}|++\rangle + \sigma_y^{(3)}|--\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_x^{(1)}(i\sigma_y^{(2)}|+-\rangle - i\sigma_y^{(2)}|-+\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sigma_x^{(1)}|+-\rangle - \sigma_x^{(1)}|-+\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-|--\rangle - |++\rangle) \\ &= -|\psi\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{D}|\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_y^{(1)}\sigma_y^{(2)}\sigma_y^{(3)}(|+++ \rangle + |-- \rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_y^{(1)}\sigma_y^{(2)}\left(\sigma_y^{(3)}|+++ \rangle + \sigma_y^{(3)}|-- \rangle\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_y^{(1)}\left(i\sigma_y^{(2)}|++- \rangle - i\sigma_y^{(2)}|--+ \rangle\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sigma_y^{(1)}|+-- \rangle - \sigma_y^{(1)}|-++ \rangle\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(-i|-- \rangle + i|++ \rangle)
\end{aligned}$$

□

אנו רואים כי $|\psi\rangle$ הוא מצב עצמי של \hat{A} עם הערך העצמי $+1$ ושל \hat{C} עם הערך העצמי -1 .

שאלה 3

חלקיק בעל מסה m בממד אחד מתואר על-ידי פונקציית הגל המנורמלת:

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{2}{a^{3/2}}x e^{-x/a} e^{ik^2x^2} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

כאשר $a > 0$ ו- k ממשי.

א. מהי ההסתברות למצוא את החלקיק בתחום $0 \leq x \leq a/2$?

ב. חשבו את $\langle p \rangle$.

ג. חשבו את צפיפות זרם ההסתברות $j(x)$ בכל מקום.

פתרון סעיף א'

ההסתברות היא:

$$\begin{aligned}
P\left(0 \leq x \leq \frac{a}{2}\right) &= \int_0^{a/2} |\psi(x)|^2 dx \\
&= \frac{4}{a^3} \int_0^{a/2} x^2 e^{-2x/a} dx \\
&= 1 - \frac{5}{2e} \\
&\approx 0.08
\end{aligned}$$

□

פתרון סעיף ב'

ערך התצפית של התנע הוא:

$$\begin{aligned}
 \langle p \rangle &= \langle \psi | \hat{p} | \psi \rangle \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x) \hat{p} \psi(x) dx \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{2}{a^{3/2}} x e^{-x/a} e^{-ik^2 x^2} \left(-i \hbar \frac{d}{dx} \right) \frac{2}{a^{3/2}} x e^{-x/a} e^{ik^2 x^2} dx \\
 &= -i \frac{4\hbar}{a^3} \int_0^{\infty} x e^{-x/a} e^{-ik^2 x^2} \frac{d}{dx} \left(x e^{-x/a} e^{ik^2 x^2} \right) dx \\
 &= -i \frac{4\hbar}{a^3} \int_0^{\infty} x e^{-x/a} e^{-ik^2 x^2} \left(e^{-x/a} e^{ik^2 x^2} - \frac{1}{a} x e^{-x/a} e^{ik^2 x^2} + 2ik^2 x^2 e^{-x/a} e^{ik^2 x^2} \right) dx \\
 &= -i \frac{4\hbar}{a^3} \int_0^{\infty} \left(x e^{-2x/a} - \frac{1}{a} x^2 e^{-2x/a} + 2ik^2 x^3 e^{-2x/a} \right) dx \\
 &= -i \frac{4\hbar}{a^3} \cdot \frac{3}{4} i a^4 k^2 \\
 &= 3a\hbar k^2
 \end{aligned}$$

□

פתרון סעיף ג'

צפיפות זרם ההסתברות היא:

$$\begin{aligned}
 j(x) &= \frac{\hbar}{m} \text{Im} \left(\psi^* \frac{d\psi}{dx} \right) \\
 &= \frac{\hbar}{m} \text{Im} \left(\psi^* \frac{\hat{p}}{-i\hbar} \psi \right) \\
 &= \frac{\hbar}{m} \text{Im} \left(\frac{4}{a^3} \left(x e^{-2x/a} - \frac{1}{a} x^2 e^{-2x/a} + 2ik^2 x^3 e^{-2x/a} \right) \right) \\
 &= \frac{8k^2 \hbar}{a^3 m} x^3 e^{-2x/a}
 \end{aligned}$$

□

שאלה 4

חלקיק בעל מסה m בשני ממדים מצוי בפוטנציאל:

$$V(x, y) = \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + 4y^2)$$

כאשר $\omega > 0$.

א. מהו ספקטרום האנרגיה של המערכת?

ב. מהו הניוון של כל רמת אנרגיה?

פתרון סעיף א'

משוואת שרדינגר בשני ממדים היא:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi + V(x, y) \psi = E \psi$$

נציב את הפוטנציאל הנתון:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi + \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + 4y^2) \psi = E \psi$$

נבצע הפרדת משתנים:

$$\psi(x, y) = X(x) Y(y)$$

נציב ונקבל:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right) + \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{2} m (2\omega)^2 y^2 \right) = E$$

אנו רואים כי סכום של שתי פונקציות בלתי-תלויות הוא קבוע, לכן כל פונקציה חייבת להיות קבועה:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 = E_x$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{2} m (2\omega)^2 y^2 = E_y$$

$$E_x + E_y = E$$

וקיבלנו שני אוסילטורים הרמוניים חד-ממדיים עצמאיים. האנרגיות המותרות לכל אוסילטור הן:

$$E_{x,n} = \left(n_x + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega, \quad E_{y,n} = \left(n_y + \frac{1}{2} \right) \hbar (2\omega)$$

לפיכך האנרגיות האפשריות עבור הפוטנציאל הנתון הן:

$$\square \quad E_n = \left(n_x + 2n_y + \frac{3}{2} \right) \hbar \omega \equiv \left(n + \frac{3}{2} \right) \hbar \omega, \quad n \equiv n_x + 2n_y$$

פתרון סעיף ב'

הניוון של הרמה ה- n הוא מספר הפתרונות בשלמים אי-שליליים של המשוואה $n = n_x + 2n_y$. בהינתן מספר n , ניתן לכתוב אותו בצורות הבאות:

$$n = n + 0, \quad n = (n-2) + 2 \cdot 1, \quad n = (n-4) + 2 \cdot 2, \quad \dots$$

כאשר אם n זוגי אז הצורה האחרונה היא $n = 0 + 2 \cdot \frac{n}{2}$, ויש $\frac{n}{2} + 1$ צורות בסה"כ, ואם n אי-זוגי אז הצורה האחרונה היא $n = 1 + 2 \cdot \frac{n-1}{2}$, ויש $\frac{n-1}{2} + 1$ צורות בסה"כ. לפיכך הניוון של הרמה ה- n הוא:

$$\square \quad d_n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$$

חלק ב'

שאלה 5

אלקטרון באטום כלשהו מצוי במצב בעל פונקציית הגל:

$$\psi(\mathbf{r}) = f(r) (2Y_{0,0}(\theta, \varphi) + Y_{1,1}(\theta, \varphi) + 3Y_{1,0}(\theta, \varphi) + 2i Y_{1,-1}(\theta, \varphi))$$

כאשר $f(r)$ היא פונקציה כלשהי והפונקציות $Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)$ הן ההרמוניות הכדוריות.

א. מהן התוצאות האפשריות במדידת L^2 , ומהן ההסתברויות לקבלתן?

ב. מצאו את $\langle L^2 \rangle$ עבור המצב הנתון.

ג. מהן התוצאות האפשריות במדידת L_z , ומהן ההסתברויות לקבלתן?

ד. מצאו את $\langle L_z \rangle$ עבור המצב הנתון.

ה. במדידת ערכו של L_z התקבל הערך \hbar . מיד לאחר מדידה זו מודדים את ערכו של L_x . מהי ההסתברות ששוב יתקבל הערך \hbar ?

פתרון סעיף א'

בסימון ברה־קט, פונקציית הגל המנורמלת היא:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}} (2|0,0\rangle + |1,+1\rangle + 3|1,0\rangle + 2i|1,-1\rangle)$$

כאשר $|\ell, m\rangle$ הם המצבים העצמיים של התנע הזוויתי. קל לראות כי מדידת L^2 תניב את התוצאה 0 בהסתברות $\frac{2}{9}$ או את התוצאה $2\hbar^2$ בהסתברות $\frac{7}{9}$.

פתרון סעיף ב'

$$\langle L^2 \rangle = \frac{2}{9} \cdot 0 + \frac{7}{9} \cdot 2\hbar^2 = \frac{14}{9}\hbar^2$$

פתרון סעיף ג'

מדידת L_z תניב את התוצאה 0 בהסתברות $\frac{13}{18}$, את התוצאה $-\hbar$ בהסתברות $\frac{4}{18}$ או את התוצאה $+\hbar$ בהסתברות $\frac{1}{18}$.

פתרון סעיף ד'

$$\langle L_z \rangle = \frac{13}{18} \cdot 0 + \frac{4}{18} \cdot (-\hbar) + \frac{1}{18} \cdot (+\hbar) = -\frac{1}{6}\hbar$$

פתרון סעיף ה'

אחרי מדידת L_z המערכת תהיה במצב עצמי של $L_z = \hbar$, כלומר, $m = +1$:

$$|\psi\rangle = |1,+1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

הייצוג של \hat{L}_x כמטריצה הוא:

$$\hat{L}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

נמצא את הווקטור העצמי $|1, 1_x\rangle$ המתאים לערך העצמי \hbar של \hat{L}_x :

$$\hat{L}_x \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \implies \hbar \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}b = c \implies |1, 1_x\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

ההסתברות לקבל את הערך העצמי \hbar תהיה ההטלה של $|\psi\rangle$ על $|1, 1_x\rangle$:

$$\langle \psi | 1, 1_x \rangle = \frac{1}{2}$$

שאלה 6

א. נתון ההמילטוניאן:

$$\hat{H} = \epsilon \hat{a}^\dagger \hat{a} + \beta (\hat{a}^\dagger)^2 \hat{a}^2$$

כאשר ϵ, β קבועים חיוביים. הראו שהמצבים העצמיים של \hat{H} הם מצבי המספר של האוסילטור ההרמוני ומצאו את האנרגיות העצמיות שלהם.

ב. המערכת נמצאת במצב:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} (|0\rangle - 2i|2\rangle)$$

חשבו את ערך התצפית של האנרגיה.

ג. נגדיר את האופרטור ההרמיטי $\hat{D} \equiv \hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}$. עבור המצב הנתון בסעיף ב', חשבו את ערך התצפית של \hat{D} .

פתרון סעיף א'

עבור המצב $|n\rangle$ נקבל:

$$\begin{aligned} \hat{H}|n\rangle &= \epsilon \hat{a}^\dagger \hat{a}|n\rangle + \beta (\hat{a}^\dagger)^2 \hat{a}^2 |n\rangle \\ &= \sqrt{n} \epsilon \hat{a}^\dagger |n-1\rangle + \sqrt{n} \beta (\hat{a}^\dagger)^2 \hat{a} |n-1\rangle \\ &= n\epsilon |n\rangle + \sqrt{n} \sqrt{n-1} \beta (\hat{a}^\dagger)^2 |n-2\rangle \\ &= n\epsilon |n\rangle + \sqrt{n} (n-1) \beta \hat{a}^\dagger |n-1\rangle \\ &= n\epsilon |n\rangle + n(n-1) \beta |n\rangle \\ &= n(\epsilon + (n-1)\beta) |n\rangle \end{aligned}$$

□ לפיכך $|n\rangle$ הוא מצב עצמי של \hat{H} עם האנרגיה העצמית $n(\epsilon + (n-1)\beta)$.

פתרון סעיף ב'

$$\begin{aligned} \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle &= (\langle 2 | 2i + \langle 0 |) \frac{1}{\sqrt{5}} \hat{H} \frac{1}{\sqrt{5}} (|0\rangle - 2i|2\rangle) \\ &= \frac{1}{5} (\langle 2 | 2i + \langle 0 |) (0|0\rangle - i4(\epsilon + \beta)|2\rangle) \\ &= \frac{8}{5} (\epsilon + \beta) \end{aligned}$$

□

פתרון סעיף ג'

נשתמש בקשרים:

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \quad \hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a})$$

ונקבל:

$$\begin{aligned}
 \hat{D} &\equiv \hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x} \\
 &= (\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}) + 2\hat{p}\hat{x} \\
 &= [\hat{x}, \hat{p}] + 2 \cdot \sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \cdot i \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \\
 &= i\hbar + i\hbar (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \\
 &= i\hbar + i\hbar \left((\hat{a}^\dagger)^2 + \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^2 \right) \\
 &= i\hbar \left(1 + (\hat{a}^\dagger)^2 + [\hat{a}^\dagger, \hat{a}] - \hat{a}^2 \right) \\
 &= i\hbar \left(1 + (\hat{a}^\dagger)^2 - 1 - \hat{a}^2 \right) \\
 &= i\hbar \left((\hat{a}^\dagger)^2 - \hat{a}^2 \right)
 \end{aligned}$$

לפיכך:

$$\begin{aligned}
 \langle \psi | \hat{D} | \psi \rangle &= (\langle 2 | 2i + \langle 0 |) \frac{1}{\sqrt{5}} i\hbar \left((\hat{a}^\dagger)^2 - \hat{a}^2 \right) \frac{1}{\sqrt{5}} (|0\rangle - 2i|2\rangle) \\
 &= \frac{1}{5} i\hbar (\langle 2 | 2i + \langle 0 |) \left((\hat{a}^\dagger)^2 (|0\rangle - 2i|2\rangle) - \hat{a}^2 (|0\rangle - 2i|2\rangle) \right) \\
 &= \frac{1}{5} i\hbar (\langle 2 | 2i + \langle 0 |) \left((\sqrt{2}|2\rangle - 4i\sqrt{3}|4\rangle) + (2i\sqrt{2}|0\rangle) \right) \\
 &= \frac{1}{5} i\hbar (2\sqrt{2}i + 2\sqrt{2}i) \\
 &= -\frac{4\sqrt{2}}{5} \hbar
 \end{aligned}$$

□

שאלה 7

חלקיק בעל מסה m מצוי בפוטנציאל:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & 0 \leq x < a \\ \infty & x \geq a \end{cases}$$

כאשר V_0, a קבועים חיוביים. אנרגיית החלקיק מקיימת $E > V_0$. נסמן:

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E, \quad q^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0)$$

א. פתרו את משוואת שרדינגר בנפרד עבור על אחד מהאזורים ורשמו את פונקציית הגל של החלקיק בכל אזור. אין צורך לנרמל.

ב. רשמו את 3 המשוואות שעל הפתרון לקיים בנקודות החיבור בין האזורים. שוב, התעלמו מהנרמול.

ג. מצאו ביטויים עבור צפיפות זרם ההסתברות באזורים $x < 0$ ו- $0 \leq x < a$.

ד. הראו כי מקדם ההעברה מאזור $x < 0$ לאזור $0 \leq x < a$ הוא:

$$T = \frac{2kq}{(q^2 + k^2) + (q^2 - k^2) \cos(2qa)}$$

ה. עבור המקרה בו האנרגיה היא כזו כך שמתקיים $qa = \frac{\pi}{2}$, רשמו את פונקציית הגל (שוב, אין צורך לנרמל), ושרטטו את צפיפות ההסתברות למציאת החלקיק בכל מקום, כפונקציה של המיקום x .

פתרון סעיף א'

עבור $x \geq a$, הפתרון הוא $\psi(x) = 0$.

עבור $x < 0$, משוואת שרדינגר הבלתי-תלויה בזמן היא:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$$

או:

$$\psi'' = -k^2\psi$$

ופתרונה הוא:

$$\psi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$$

עבור $0 \leq x < a$, משוואת שרדינגר היא:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V_0\psi = E\psi$$

או:

$$\psi'' = -q^2\psi$$

ופתרונה הוא:

$$\psi(x) = C e^{iqx} + D e^{-iqx}$$

בסה"כ נקבל:

$$\psi(x) = \begin{cases} A e^{ikx} + B e^{-ikx} & x < 0 \\ C e^{iqx} + D e^{-iqx} & 0 \leq x < a \\ 0 & x \geq a \end{cases}$$

□

פתרון סעיף ב'

על הפתרון להיות רציף ב- $x = 0$ וב- $x = a$:

$$\psi(0) = A + B = C + D, \quad \psi(a) = C e^{iqa} + D e^{-iqa} = 0$$

הנגזרת היא:

$$\psi'(x) = \begin{cases} ik(A e^{ikx} - B e^{-ikx}) & x < 0 \\ iq(C e^{iqx} - D e^{-iqx}) & 0 \leq x < a \\ 0 & x \geq a \end{cases}$$

ועליה להיות רציפה ב- $x = 0$:

$$\psi'(0) = ik(A - B) = iq(C - D)$$

□

פתרון סעיף ג'

בסעיף ב' מצאנו את שלוש המשוואות:

$$A + B = C + D, \quad C e^{iqa} + D e^{-iqa} = 0, \quad A - B = \frac{q}{k} (C - D)$$

מהמשוואה האמצעית נקבל:

$$D = -e^{2iqa} C$$

מחיבור המשוואה השמאלית והימנית נקבל:

$$\begin{aligned} 2A &= C + D + \frac{q}{k} (C - D) \\ &= C - e^{2iqa} C + \frac{q}{k} (C + e^{2iqa} C) \\ &= \left(1 - e^{2iqa} + \frac{q}{k} (1 + e^{2iqa})\right) C \end{aligned}$$

לכן:

$$A = \frac{(q+k) + (q-k)e^{2iqa}}{2k} C$$

בדומה, מחיסור המשוואה השמאלית והימנית נקבל:

$$\begin{aligned} 2B &= C + D - \frac{q}{k} (C - D) \\ &= C - e^{2iqa} C - \frac{q}{k} (C + e^{2iqa} C) \\ &= \left(1 - e^{2iqa} - \frac{q}{k} (1 + e^{2iqa})\right) C \end{aligned}$$

לכן:

$$B = \frac{(k-q) - (k+q)e^{2iqa}}{2k} C$$

כעת, באזור $x < 0$, צפיפות זרם ההסתברות היא:

$$\begin{aligned} j_1 &= \frac{\hbar}{m} \text{Im}(\psi^* \psi') \\ &= \frac{\hbar}{m} \text{Im}((A^* e^{-ikx} + B^* e^{ikx}) i k (A e^{ikx} - B e^{-ikx})) \\ &= \frac{\hbar}{m} \text{Im}(i k (|A|^2 - |B|^2 + 2i \text{Im}(AB^* e^{2ikx}))) \\ &= \frac{\hbar k}{m} (|A|^2 - |B|^2) \\ &= \frac{\hbar k}{m} \left(\left| \frac{(q+k) + (q-k)e^{2iqa}}{2k} \right|^2 - \left| \frac{(k-q) - (k+q)e^{2iqa}}{2k} \right|^2 \right) |C|^2 \\ &= \frac{\hbar}{4mk} (|(q+k) + (q-k)e^{2iqa}|^2 - |(k-q) - (k+q)e^{2iqa}|^2) |C|^2 \end{aligned}$$

ובדומה, באזור $0 \leq x < a$:

$$\begin{aligned} j_2 &= \frac{\hbar}{m} \text{Im}(\psi^* \psi') \\ &= \frac{\hbar}{m} \text{Im}((C^* e^{-iqx} + D^* e^{iqx}) i q (C e^{iqx} - D e^{-iqx})) \\ &= \frac{\hbar}{m} \text{Im}(i q (|C|^2 - |D|^2 + 2i \text{Im}(CD^* e^{2iqx}))) \\ &= \frac{\hbar q}{m} (|C|^2 - |D|^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

כי $|C|^2 = |D|^2$.

פתרון סעיף ד'

כזכור, הפתרון הוא:

$$\psi(x) = \begin{cases} A e^{ikx} + B e^{-ikx} & x < 0 \\ C e^{iqx} + D e^{-iqx} & 0 \leq x < a \\ 0 & x \geq a \end{cases}$$

עבור גל הנע ימינה באזור $x < 0$ מתקיים $B = 0$. עבור גל אשר ממשיך ימינה באזור $0 \leq x < a$ מתקיים $D = 0$. לפיכך מקדם ההעברה הוא:

$$\begin{aligned} T &= \left| \frac{j_2}{j_1} \right|_{B=D=0} \\ &= \frac{\frac{\hbar q}{m} |C|^2}{\frac{\hbar k}{m} |A|^2} \\ &= \frac{q}{k} \frac{|C|^2}{\left| \frac{(q+k) + (q-k)e^{2iqa}}{2k} C \right|^2} \\ &= \frac{4qk}{|(q+k) + (q-k)e^{2iqa}|^2} \\ &= \frac{4qk}{(q+k)^2 + (q-k)^2 + (q^2 - k^2)(e^{-2iqa} + e^{2iqa})} \\ &= \frac{4qk}{(q^2 + k^2 + 2qk) + (q^2 + k^2 - 2qk) + 2(q^2 - k^2) \cos(2qa)} \\ &= \frac{2qk}{q^2 + k^2 + (q^2 - k^2) \cos(2qa)} \end{aligned}$$

□

כפי שרצינו להראות.

פתרון סעיף ה'

כאשר $qa = \pi/2$ נקבל:

$$e^{2iqa} = e^{i\pi} = -1$$

לכן המקדמים יהיו:

$$A = \frac{(q+k) - (q-k)}{2k} C = C$$

$$B = \frac{(k-q) + (k+q)}{2k} C = C$$

$$D = -e^{2iqa} C = C$$

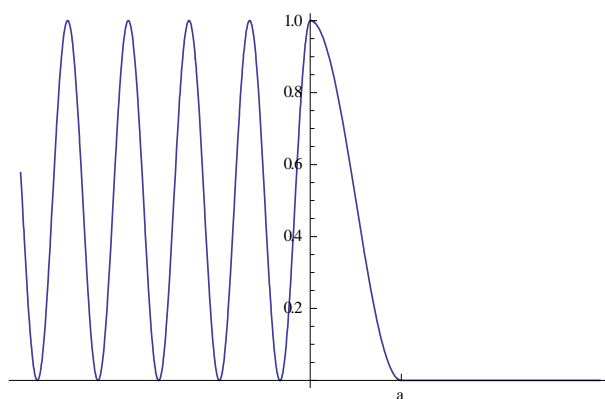
ופונקציית הגל תהיה (עד כדי נרמול):

$$\begin{aligned} \psi(x) &\propto \begin{cases} e^{ikx} + e^{-ikx} & x < 0 \\ e^{iqx} + e^{-iqx} & 0 \leq x < a \\ 0 & x \geq a \end{cases} \\ &\propto \begin{cases} \cos(kx) & x < 0 \\ \cos(qx) & 0 \leq x < a \\ 0 & x \geq a \end{cases} \end{aligned}$$

צפיפות ההסתברות תהיה:

$$|\psi(x)|^2 = \begin{cases} \cos^2(kx) & x < 0 \\ \cos^2(qx) & 0 \leq x < a \\ 0 & x \geq a \end{cases}$$

נשים לב כי $k < q$, לכן המחזור באזור $x < 0$ קצר יותר מהמחזור באזור $0 \leq x < a$. באזור $0 \leq x < a$ נקבל חצי מחזור של קוסינוס בריבוע (כי $qa = \pi/2$). לכן הגרף יראה כך:



□