

קוונטים 1: פתרון מבחן מועד א' סמסטר א' תשע"א

גרסה 1.0, יולי 2011

ברק שושני
baraksh@gmail.com | http://baraksh.co.il/

שאלה 1

אלקטרון באטום כלשהו מצוי במצב בעל פונקציית הגל:

$$\psi(\mathbf{r}) = f(r) (2Y_{0,0}(\theta, \varphi) + Y_{1,1}(\theta, \varphi) + 3Y_{1,0}(\theta, \varphi) + 2iY_{1,-1}(\theta, \varphi))$$

כאשר $f(r)$ היא פונקציה כלשהי והפונקציות $Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)$ הן ההרמוניות הכדוריות.

- מהן התוצאות האפשריות במדידת L^2 , ומהן ההסתברויות לקבלתן?
- מצאו את $\langle L^2 \rangle$ עבור המצב הנתון.
- מהן התוצאות האפשריות במדידת L_z , ומהן ההסתברויות לקבלתן?
- מצאו את $\langle L_z \rangle$ עבור המצב הנתון.

פתרון סעיף א'

בסימון ברה־קט, פונקציית הגל המנורמלת היא:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}} (2|0,0\rangle + |1,+1\rangle + 3|1,0\rangle + 2i|1,-1\rangle)$$

כאשר $|\ell, m\rangle$ הם המצבים העצמיים של התנע הזוויתי. קל לראות כי מדידת L^2 תניב את התוצאה 0 בהסתברות $\frac{2}{9}$ או את התוצאה $2\hbar^2$ בהסתברות $\frac{7}{9}$.

פתרון סעיף ב'

$$\langle L^2 \rangle = \frac{2}{9} \cdot 0 + \frac{7}{9} \cdot 2\hbar^2 = \frac{14}{9}\hbar^2$$

פתרון סעיף ג'

מדידת L_z תניב את התוצאה 0 בהסתברות $\frac{13}{18}$, את התוצאה $-\hbar$ בהסתברות $\frac{4}{18}$ או את התוצאה $+\hbar$ בהסתברות $\frac{1}{18}$.

$$\langle L_z \rangle = \frac{13}{18} \cdot 0 + \frac{4}{18} \cdot (-\hbar) + \frac{1}{18} \cdot (+\hbar) = -\frac{1}{6}\hbar$$

שאלה 2

א. הראו כי מצב עצמי $|n\rangle$ של האנרגיה של אוסילטור הרמוני הוא גם מצב עצמי של האופרטור $\hat{N} \equiv \hat{a}^\dagger \hat{a}$, כאשר \hat{a}, \hat{a}^\dagger הם אופרטורי הסולם של אוסילטור הרמוני.

ב. נתון ההמילטוניאן:

$$\hat{H} = \epsilon \hat{a}^\dagger \hat{a} + \beta (\hat{a}^\dagger)^2 \hat{a}^2$$

כאשר ϵ, β קבועים חיוביים. הראו שהמצבים העצמיים של \hat{H} הם מצבי המספר של האוסילטור הרמוני ומצאו את האנרגיות העצמיות שלהם.

ג. המערכת נמצאת במצב:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} (|0\rangle - 2i|2\rangle)$$

חשבו את ערך התצפית של האנרגיה.

ד. נגדיר את האופרטור ההרמיטי $\hat{D} \equiv \hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}$. עבור המצב הנתון בסעיף ב', חשבו את ערך התצפית של \hat{D} .

פתרון סעיף א'

מתקיים:

$$\begin{aligned} \hat{N}|n\rangle &= \hat{a}^\dagger \hat{a}|n\rangle \\ &= \sqrt{n} \hat{a}^\dagger |n-1\rangle \\ &= n|n\rangle \end{aligned}$$

לפיכך $|n\rangle$ הוא מצב עצמי של \hat{N} עם הערך העצמי n .

פתרון סעיף ב'

עבור המצב $|n\rangle$ נקבל:

$$\begin{aligned} \hat{H}|n\rangle &= \epsilon \hat{a}^\dagger \hat{a}|n\rangle + \beta (\hat{a}^\dagger)^2 \hat{a}^2 |n\rangle \\ &= \sqrt{n} \epsilon \hat{a}^\dagger |n-1\rangle + \sqrt{n} \beta (\hat{a}^\dagger)^2 \hat{a} |n-1\rangle \\ &= n\epsilon |n\rangle + \sqrt{n} \sqrt{n-1} \beta (\hat{a}^\dagger)^2 |n-2\rangle \\ &= n\epsilon |n\rangle + \sqrt{n} (n-1) \beta \hat{a}^\dagger |n-1\rangle \\ &= n\epsilon |n\rangle + n(n-1) \beta |n\rangle \\ &= n(\epsilon + (n-1)\beta) |n\rangle \end{aligned}$$

לפיכך $|n\rangle$ הוא מצב עצמי של \hat{H} עם האנרגיה העצמית $n(\epsilon + (n-1)\beta)$.

$$\begin{aligned} \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle &= (\langle 2 | 2i + \langle 0 |) \frac{1}{\sqrt{5}} \hat{H} \frac{1}{\sqrt{5}} (|0\rangle - 2i |2\rangle) \\ &= \frac{1}{5} (\langle 2 | 2i + \langle 0 |) (0 | 0\rangle - i 4 (\epsilon + \beta) |2\rangle) \\ &= \frac{8}{5} (\epsilon + \beta) \end{aligned}$$

□

פתרון סעיף ד'

נשתמש בקשרים:

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \quad \hat{p} = i \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a})$$

ונקבל:

$$\begin{aligned} \hat{D} &\equiv \hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x} \\ &= (\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}) + 2\hat{p}\hat{x} \\ &= [\hat{x}, \hat{p}] + 2 \cdot \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \cdot i \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \\ &= i\hbar + i\hbar (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \\ &= i\hbar + i\hbar \left((\hat{a}^\dagger)^2 + \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^2 \right) \\ &= i\hbar \left(1 + (\hat{a}^\dagger)^2 + [\hat{a}^\dagger, \hat{a}] - \hat{a}^2 \right) \\ &= i\hbar \left(1 + (\hat{a}^\dagger)^2 - 1 - \hat{a}^2 \right) \\ &= i\hbar \left((\hat{a}^\dagger)^2 - \hat{a}^2 \right) \end{aligned}$$

לפיכך:

$$\begin{aligned} \langle \psi | \hat{D} | \psi \rangle &= (\langle 2 | 2i + \langle 0 |) \frac{1}{\sqrt{5}} i\hbar \left((\hat{a}^\dagger)^2 - \hat{a}^2 \right) \frac{1}{\sqrt{5}} (|0\rangle - 2i |2\rangle) \\ &= \frac{1}{5} i\hbar (\langle 2 | 2i + \langle 0 |) \left((\hat{a}^\dagger)^2 (|0\rangle - 2i |2\rangle) - \hat{a}^2 (|0\rangle - 2i |2\rangle) \right) \\ &= \frac{1}{5} i\hbar (\langle 2 | 2i + \langle 0 |) \left((\sqrt{2} |2\rangle - 4i\sqrt{3} |4\rangle) + (2i\sqrt{2} |0\rangle) \right) \\ &= \frac{1}{5} i\hbar (2\sqrt{2}i + 2\sqrt{2}i) \\ &= -\frac{4\sqrt{2}}{5} \hbar \end{aligned}$$

□

שאלה 3

חלקיק בעל מסה m מצוי בפוטנציאל:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & 0 \leq x < a \\ \infty & x \geq a \end{cases}$$

כאשר V_0, a קבועים חיוביים. אנרגיית החלקיק מקיימת $E > V_0$. נסמן:

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E, \quad q^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0)$$

א. פתרו את משוואת שרדינגר בנפרד עבור על אחד מהאזורים ורשמו את פונקציית הגל של החלקיק בכל אזור. אין צורך לנרמל.

ב. רשמו את 3 המשוואות שעל הפתרון לקיים בנקודות החיבור בין האזורים. שוב, התעלמו מהנרמול.

ג. מצאו ביטויים עבור צפיפות זרם ההסתברות באזורים $x < 0$ ו- $0 \leq x < a$.

ד. הראו כי מקדם ההעברה מאזור $x < 0$ לאזור $0 \leq x < a$ הוא:

$$T = \frac{2kq}{(q^2 + k^2) + (q^2 - k^2) \cos(2qa)}$$

ה. עבור המקרה בו האנרגיה היא כזו כך שמתקיים $qa = \frac{\pi}{2}$, רשמו את פונקציית הגל (שוב, אין צורך לנרמל), ושרטטו את צפיפות ההסתברות למציאת החלקיק בכל מקום, כפונקציה של המיקום x .

פתרון סעיף א'

עבור $x \geq a$, הפתרון הוא $\psi(x) = 0$.

עבור $x < 0$, משוואת שרדינגר הבלתי-תלויה בזמן היא:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$$

או:

$$\psi'' = -k^2\psi$$

ופתרונה הוא:

$$\psi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$$

עבור $0 \leq x < a$, משוואת שרדינגר היא:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V_0\psi = E\psi$$

או:

$$\psi'' = -q^2\psi$$

ופתרונה הוא:

$$\psi(x) = C e^{iqx} + D e^{-iqx}$$

בסה"כ נקבל:

$$\psi(x) = \begin{cases} A e^{ikx} + B e^{-ikx} & x < 0 \\ C e^{iqx} + D e^{-iqx} & 0 \leq x < a \\ 0 & x \geq a \end{cases}$$

□

פתרון סעיף ב'

על הפתרון להיות רציף ב- $x = 0$ וב- $x = a$:

$$\psi(0) = A + B = C + D, \quad \psi(a) = C e^{iqa} + D e^{-iqa} = 0$$

הנגזרת היא:

$$\psi'(x) = \begin{cases} ik(A e^{ikx} - B e^{-ikx}) & x < 0 \\ iq(C e^{iqx} - D e^{-iqx}) & 0 \leq x < a \\ 0 & x \geq a \end{cases}$$

ועליה להיות רציפה ב- $x = 0$:

$$\psi'(0) = ik(A - B) = iq(C - D)$$

□

פתרון סעיף ג'

בסעיף ב' מצאנו את שלוש המשוואות:

$$A + B = C + D, \quad C e^{iqa} + D e^{-iqa} = 0, \quad A - B = \frac{q}{k}(C - D)$$

מהמשוואה האמצעית נקבל:

$$D = -e^{2iqa} C$$

מחיבור המשוואה השמאלית והימנית נקבל:

$$\begin{aligned} 2A &= C + D + \frac{q}{k}(C - D) \\ &= C - e^{2iqa} C + \frac{q}{k}(C + e^{2iqa} C) \\ &= \left(1 - e^{2iqa} + \frac{q}{k}(1 + e^{2iqa})\right) C \end{aligned}$$

לכן:

$$A = \frac{(q+k) + (q-k)e^{2iqa}}{2k} C$$

בדומה, מחיסור המשוואה השמאלית והימנית נקבל:

$$\begin{aligned} 2B &= C + D - \frac{q}{k}(C - D) \\ &= C - e^{2iqa} C - \frac{q}{k}(C + e^{2iqa} C) \\ &= \left(1 - e^{2iqa} - \frac{q}{k}(1 + e^{2iqa})\right) C \end{aligned}$$

לכן:

$$B = \frac{(k-q) - (k+q)e^{2iqa}}{2k} C$$

כעת, באזור $x < 0$, צפיפות זרם ההסתברות היא:

$$\begin{aligned} j_1 &= \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im}(\psi^* \psi') \\ &= \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im}((A^* e^{-ikx} + B^* e^{ikx}) i k (A e^{ikx} - B e^{-ikx})) \\ &= \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im}\left(ik(|A|^2 - |B|^2 + 2i \operatorname{Im}(AB^* e^{2ikx}))\right) \\ &= \frac{\hbar k}{m} (|A|^2 - |B|^2) \\ &= \frac{\hbar k}{m} \left(\left| \frac{(q+k) + (q-k)e^{2iqa}}{2k} \right|^2 - \left| \frac{(k-q) - (k+q)e^{2iqa}}{2k} \right|^2 \right) |C|^2 \\ &= \frac{\hbar}{4mk} \left(|(q+k) + (q-k)e^{2iqa}|^2 - |(k-q) - (k+q)e^{2iqa}|^2 \right) |C|^2 \end{aligned}$$

ובדומה, באזור $0 \leq x < a$:

$$\begin{aligned} j_2 &= \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im}(\psi^* \psi') \\ &= \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im}((C^* e^{-iqx} + D^* e^{iqx}) i q (C e^{iqx} - D e^{-iqx})) \\ &= \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im}(i q (|C|^2 - |D|^2 + 2i \operatorname{Im}(CD^* e^{2iqx}))) \\ &= \frac{\hbar q}{m} (|C|^2 - |D|^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

כי $|C|^2 = |D|^2$.

פתרון סעיף ד'

כזכור, הפתרון הוא:

$$\psi(x) = \begin{cases} A e^{ikx} + B e^{-ikx} & x < 0 \\ C e^{iqx} + D e^{-iqx} & 0 \leq x < a \\ 0 & x \geq a \end{cases}$$

עבור גל הנע ימינה באזור $x < 0$ מתקיים $B = 0$. עבור גל אשר ממשיך ימינה באזור $0 \leq x < a$ מתקיים $D = 0$. לפיכך מקדם ההעברה הוא:

$$\begin{aligned} T &= \left| \frac{j_2}{j_1} \right|_{B=D=0} \\ &= \frac{\frac{\hbar q}{m} |C|^2}{\frac{\hbar k}{m} |A|^2} \\ &= \frac{q}{k} \frac{|C|^2}{\left| \frac{(q+k) + (q-k)e^{2iqa}}{2k} C \right|^2} \\ &= \frac{4qk}{|(q+k) + (q-k)e^{2iqa}|^2} \\ &= \frac{4qk}{(q+k)^2 + (q-k)^2 + (q^2 - k^2)(e^{-2iqa} + e^{2iqa})} \\ &= \frac{4qk}{(q^2 + k^2 + 2qk) + (q^2 + k^2 - 2qk) + 2(q^2 - k^2) \cos(2qa)} \\ &= \frac{2qk}{q^2 + k^2 + (q^2 - k^2) \cos(2qa)} \end{aligned}$$

□

כפי שרצינו להראות.

פתרון סעיף ה'

כאשר $qa = \pi/2$ נקבל:

$$e^{2iqa} = e^{i\pi} = -1$$

לכן המקדמים יהיו:

$$A = \frac{(q+k) - (q-k)}{2k} C = C$$

$$B = \frac{(k-q) + (k+q)}{2k} C = C$$

$$D = -e^{2iqa} C = C$$

ופונקציית הגל תהיה (עד כדי נרמול):

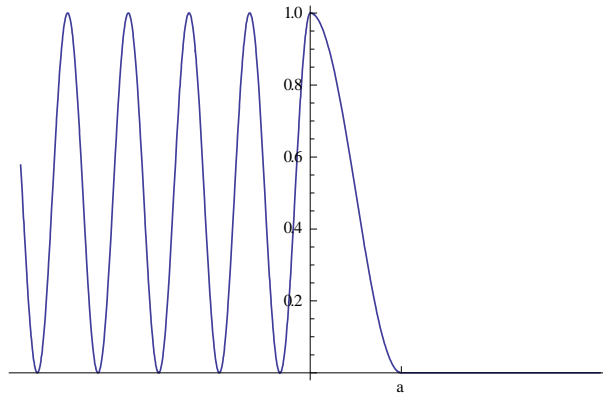
$$\psi(x) \propto \begin{cases} e^{ikx} + e^{-ikx} & x < 0 \\ e^{iqx} + e^{-iqx} & 0 \leq x < a \\ 0 & x \geq a \end{cases}$$

$$\propto \begin{cases} \cos(kx) & x < 0 \\ \cos(qx) & 0 \leq x < a \\ 0 & x \geq a \end{cases}$$

צפיפות ההסתברות תהיה:

$$|\psi(x)|^2 = \begin{cases} \cos^2(kx) & x < 0 \\ \cos^2(qx) & 0 \leq x < a \\ 0 & x \geq a \end{cases}$$

נשים לב כי $q < k$, לכן המחזור באזור $x < 0$ קצר יותר מהמחזור באזור $0 \leq x < a$. באזור $0 \leq x < a$ נקבל חצי מחזור של קוסינוס בריבוע (כי $qa = \pi/2$). לכן הגרף יראה כך:



□

שאלה 4

חלקיק מוגבל לנוע על ציר x בלבד (בעיה חד-ממדית) תחת השפעת פוטנציאל כלשהו $V(x)$.

- עבור חלקיק קשור, כמה מצבים עצמיים בלתי-תלויים לינארית קיימים עבור אנרגיה נתונה E ?
- אופרטור הזוגיות \hat{P} מוגדר כך שבמרחב x הפעולה שלו היא $\hat{P}x = -x$. מצאו את הערכים העצמיים של \hat{P} .
- הוכיחו כי אם $V(-x) = V(x)$ אז $[\hat{H}, \hat{P}] = 0$, כאשר \hat{H} הוא אופרטור האנרגיה של המערכת.
- הוכיחו כי אם $[\hat{H}, \hat{P}] = 0$ אז כל מצב עצמי קשור של האנרגיה הוא בעל זוגיות מוגדרת היטב, כלומר זוגי ($\psi(-x) = \psi(x)$) או אי-זוגי ($\psi(-x) = -\psi(x)$).

פתרון סעיף א'

משוואת שרדינגר היא:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi$$

והיא משוואה דיפרנציאלית רגילה מסדר שני. לכן, בהנחה כי $V(x)$ חלקה, לפי משפט הקיום והיחידות יש למשוואה בדיוק שני פתרונות בלתי-תלויים.

□

פתרון סעיף ב'

תהי $f(x)$ פונקציה עצמית של \hat{P} עם הערך העצמי λ :

$$\hat{P}f(x) = \lambda f(x)$$

אז מתקיים:

$$\lambda^2 f(x) = \hat{P}^2 f(x) = \hat{P}f(-x) = f(x)$$

□

לפיכך $\lambda^2 = 1$ והערכים העצמיים הם ± 1 .

פתרון סעיף ג'

תהי $\psi(x)$ פונקציה כלשהי, אז מתקיים:

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \hat{P}]\psi(x) &= \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x), \hat{P} \right] \psi(x) \\ &= \left(\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x) \right) \hat{P} - \hat{P} \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x) \right) \right) \psi(x) \\ &= \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x) \right) \hat{P}\psi(x) - \hat{P} \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x) \right) \psi(x) \\ &= \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x) \right) \psi(-x) - \hat{P} \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} \psi(x) + V(x) \psi(x) \right) \\ &= \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} \psi(-x) + V(x) \psi(-x) \right) - \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} \psi(-x) + V(-x) \psi(-x) \right) \\ &= \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} \psi(-x) + V(x) \psi(-x) \right) - \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} \psi(-x) + V(x) \psi(-x) \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

לפיכך $[\hat{H}, \hat{P}] = 0$.

פתרון סעיף ד'

בסעיף א' ראינו כי יש בדיוק שני מצבים עצמיים בלתי-תלויים לינארית, $|E, 1\rangle$ ו- $|E, 2\rangle$, עבור אנרגיה נתונה E . מכיוון ש- $[\hat{H}, \hat{P}] = 0$, האופרטורים \hat{H} ו- \hat{P} הם תואמים. לפיכך המצב העצמי $|E, i\rangle$ של \hat{H} יהיה גם מצב עצמי של \hat{P} , עם הערך העצמי $\langle E, i | \hat{P} | E, i \rangle$. אך פונקציה עצמית של \hat{P} חייבת להיות או זוגית, עם הערך העצמי $+1$:

$$1 \cdot \psi(x) = \hat{P}\psi(x) = \psi(-x) \implies \psi(x) = \psi(-x)$$

או אי-זוגית, עם הערך העצמי -1 :

$$-1 \cdot \psi(x) = \hat{P}\psi(x) = \psi(-x) \implies -\psi(x) = \psi(-x)$$

□

כפי שרצינו להוכיח.