

# הסתברות למדעים: פתרון מבחן מועד א' תש"ע (27/1/2010)

גרסה 1.3, ינואר 2010

ברק שושני  
baraksh@gmail.com | http://baraksh.co.il/

## חלק א'

### שאלה 1

- יהיו  $X, Y$  משתנים מקריים שפונקציית הצפיפות המשותפת שלהם היא אחידה במשולש שקודקודיו הם  $(1, -1), (-1, -1), (-1, 1)$ .
- מצאו את  $E(Y)$ .
  - מצאו את הצפיפות המותנית של  $Y$  בהינתן ערך של  $X$ .
  - מצאו את  $E(Y|X)$ .
  - מצאו את ההתפלגות של  $\min(X, Y)$ .
  - מהי הצפיפות המשותפת של  $|X|, |Y|$ ?

### פתרון סעיף א'

נסמן את המשולש ב- $\mathcal{T}$ . שטח המשולש הוא  $\text{Area } \mathcal{T} = 2$ . ברור כי  $Y$  מקבל ערכים רק בקטע  $[-1, 1]$ . בהינתן  $y \in [-1, 1]$ , החלק של המשולש שנמצא מעל לקו  $Y = y$  הוא משולש קטן יותר, בעל צלעות באורך  $1 - y$ , ושטחו הוא  $(1 - y)^2 / 2$ . לפיכך השטח שנמצא מתחת לקו  $Y = y$  הוא בעל שטח  $2 - (1 - y)^2 / 2$ . מכאן:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \begin{cases} 0 & y < -1 \\ 1 - \frac{(1-y)^2}{4} & y \in [-1, 1] \\ 1 & 1 < y \end{cases}$$

נגזור לקבלת הצפיפות:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1-y}{2} & y \in [-1, 1] \\ 0 & y \notin [-1, 1] \end{cases} = \frac{1-y}{2} \mathcal{I}_{y \in [-1, 1]}$$

כאשר  $\mathcal{I}_{y \in [-1, 1]}$  הוא אינדיקטור. מכאן:

$$\square \quad E(Y) = \int_{\mathbb{R}} y f_Y(y) dy = \int_{-1}^1 y \frac{1-y}{2} dy = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{3} y^3 \Big|_{-1}^1 \right) = -\frac{1}{3}$$

**פתרון סעיף ב'**

בהינתן  $X = x$ ,  $Y$  יכול לקבל ערכים רק בתחום  $[-1, -x]$ , ובתחום זה התפלגותו היא אחידה. מכאן:

$$\square \quad f_{Y|X=x}(y) = \frac{1}{1-x} \mathcal{I}_{y \in [-1, -x]}$$

**פתרון סעיף ג'**

לפי הנוסחה לתוחלת של התפלגות אחידה:

$$E(Y|X) = -\frac{1+X}{2}$$

$\square$  (זהו משתנה מקרי).

**פתרון סעיף ד'**

ההתפלגות היא:

$$\begin{aligned} F_{\min(X,Y)}(m) &= P(\min(X, Y) \leq m) \\ &= P(X \leq m \cup Y \leq m) \\ &= P(X \leq m) + P(Y \leq m) - P(X \leq m \cap Y \leq m) \end{aligned}$$

נשים לב כי:

$$P(X \leq m) = P(Y \leq m) = \begin{cases} 0 & m < -1 \\ 1 - \frac{(1-m)^2}{4} & m \in [-1, 1] \\ 1 & 1 < m \end{cases}$$

בנוסף, אם  $m \in [-1, 0]$  אז חיתוך השטח  $\{X \leq m \cap Y \leq m\}$  עם המשולש  $\mathcal{T}$  הוא ריבוע עם צלע באורך  $1+m$ , אך אם  $m \in (0, 1]$  החיתוך הוא כל  $\mathcal{T}$  פרט לשני משולשים קטנים בפינות, עם צלע  $1-m$ . מכאן:

$$P(X \leq m \cap Y \leq m) = \begin{cases} 0 & m < -1 \\ \frac{(1+m)^2}{2} & m \in [-1, 0] \\ 1 - \frac{(1-m)^2}{2} & m \in (0, 1] \\ 1 & 1 < m \end{cases}$$

לכן:

$$\begin{aligned} F_{\min(X,Y)}(m) &= \begin{cases} 0 & m < -1 \\ 2 - \frac{(1-m)^2}{2} & m \in [-1, 1] \\ 2 & 1 < m \end{cases} - \begin{cases} 0 & m < -1 \\ \frac{(1+m)^2}{2} & m \in [-1, 0] \\ 1 - \frac{(1-m)^2}{2} & m \in (0, 1] \\ 1 & 1 < m \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & m < -1 \\ 2 - \frac{(1-m)^2}{2} - \frac{(1+m)^2}{2} & m \in [-1, 0] \\ 1 & 0 < m \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & m < -1 \\ 1 - m^2 & m \in [-1, 0] \\ 1 & 0 < m \end{cases} \end{aligned}$$

$\square$

**פתרון סעיף ה'**

קל לראות כי אם ניקח ערך מוחלט על הנקודות בתוך המשולש  $\mathcal{T}$  נקבל את המרובע  $[0, 1]^2$  (פעמיים) באופן סימטרי לחלוטין. לפיכך  $|X|, |Y|$  מתפלגים אחיד על המרובע הנ"ל, ומכאן:

□ 
$$f_{|X|,|Y|}(x, y) = \mathcal{I}_{x \in [0,1]} \mathcal{I}_{y \in [0,1]}$$

**שאלה 2**

יהי  $X$  משתנה מקרי שפונקציית הצפיפות שלו פרופורציונית ל- $x^3$  כאשר  $x \in [0, 1]$  ואחרת  $f_X(x) = 0$ . בוחרים  $x$  לפי ההתפלגות של  $X$  ומטילים מטבע עם שתי תוצאות אפשריות 0 ו-1 כך שהסתברות לקבל 1 היא  $x$ . נקרא לתוצאת ההטלה  $Y$ .

א. מצאו את  $E(Y)$ .

ב. מצאו את  $E(Y|X)$ .

ג. מצאו את  $E(XY)$ .

ד. יהיו  $X_n$  משתנים מקריים בלתי-תלויים כך של- $X_n$  יש פונקציית צפיפות שהיא פרופורציונית ל- $x^3$  כאשר  $x \in [0, \lambda_n]$  עם  $0 < \lambda_n < 1$  ואחרת  $f_{X_n}(x) = 0$ . נסמן ב- $Y_n$  את תוצאת הטלת המטבע כך שהסתברות לקבלת התוצאה 1 מתפלגת לפי  $X_n^2$ . נסמן  $S = Y_1 + Y_2 + \dots$ . מצאו תנאי הכרחי ומספיק לכך ש- $P(S < \infty) = 1$ .

**פתרון סעיף א'**

פונקציית הצפיפות של  $X$  היא:

$$f_X(x) = cx^3 \mathcal{I}_{x \in [0,1]}$$

נמצא את הקבוע  $c$  לפי תנאי הנורמליזציה:

$$1 = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) dx = \int_0^1 cx^3 dx = \frac{c}{4} \implies c = 4$$

מכאן:

$$f_X(x) = 4x^3 \mathcal{I}_{x \in [0,1]}$$

כעת, מתקיים:

$$E(Y|X = x) = \sum_y yP(Y = y|X = x) = P(Y = 1|X = x) = x$$

לכן:

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} E(Y|X = x) f_X(x) dx \\ &= \int_0^1 x \cdot 4x^3 dx \\ &= \frac{4}{5} x^5 \Big|_0^1 \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

□

**פתרון סעיף ב'**

מהסעיף הקודם:

□  $E(Y|X) = X$

**פתרון סעיף ג'**

מתקיים:

$$f_{X|Y=y}(x) = f_X(x) \frac{P(Y=y|X=x)}{P(Y=y)} = 4x^3 \frac{P(Y=y|X=x)}{P(Y=y)} \mathcal{I}_{x \in [0,1]}$$

כמו כן מהסעיף הקודם:

$$P(Y=1) = \frac{4}{5}, \quad P(Y=0) = \frac{1}{5}$$

לכן:

$$f_{X|Y=1}(x) = 4x^3 \frac{x}{4/5} = 5x^4 \mathcal{I}_{x \in [0,1]}$$
$$f_{X|Y=0}(x) = 4x^3 \frac{1-x}{1/5} = 20x^3(1-x) \mathcal{I}_{x \in [0,1]}$$

ומכאן:

$$E(X|Y=1) = \int_{\mathbb{R}} x f_{X|Y=1}(x) dx = \int_0^1 x \cdot 5x^4 dx = \frac{5}{6}$$
$$E(X|Y=0) = \int_{\mathbb{R}} x f_{X|Y=0}(x) dx = \int_0^1 x \cdot 20x^3(1-x) dx = 20 \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) = \frac{2}{3}$$

לפיכך:

□  $E(X|Y) = \begin{cases} \frac{5}{6} & \text{with probability } \frac{4}{5} \\ \frac{2}{3} & \text{with probability } \frac{1}{5} \end{cases}$

**פתרון סעיף ד'**

נחזור על פיתוח דומה לזה שבסעיף א'. פונקציית הצפיפות של כל  $X_n$  היא:

$$f_{X_n}(x) = cx^3 \mathcal{I}_{x \in [0, \lambda_n]}$$

נמצא את הקבוע  $c$  לפי תנאי הנורמליזציה:

$$1 = \int_{\mathbb{R}} f_{X_n}(x) dx = \int_0^{\lambda_n} cx^3 dx = \frac{c\lambda_n^4}{4} \implies c = \frac{4}{\lambda_n^4}$$

מכאן:

$$f_{X_n}(x) = \frac{4}{\lambda_n^4} x^3 \mathcal{I}_{x \in [0, \lambda_n]}$$

כעת, מתקיים:

$$P(Y_n = 1) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(Y_n = 1|X=x) f_X(x) dx = \int_0^{\lambda_n} x^2 \cdot \frac{4}{\lambda_n^4} x^3 dx = \frac{4}{\lambda_n^4} \left( \frac{x^6}{6} \right) \Big|_0^{\lambda_n} = \frac{2}{3} \lambda_n^2$$

לכן:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(Y_n = 1) = \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2$$

כלומר, הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} P(Y_n = 1)$  מתכנס אם ורק אם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2$  מתכנס. המשתנים המקריים  $Y_n$  בלתי-תלויים, לכן לפי שתי הלמות של בורל וקנטלי:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(Y_n = 1) < \infty \iff P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{Y_n = 1\}\right) = 0$$

נתבונן במשתנה המקרי:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n$$

מאחר שכל  $Y_n$  מקבל או 0 או 1, הסכום סופי אם ורק אם מספר ה- $Y_n$ ים שמקבלים את הערך 1 הוא סופי, או במלים אחרות, כל האיברים הם 0 החל ממקום מסוים:

$$P(S < \infty) = 1 \implies P(Y_n = 0 \text{ eventually}) = P\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \{Y_n = 0\}\right) = 1$$

אבל:

$$P\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \{Y_n = 0\}\right) = 1 - P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{Y_n = 1\}\right)$$

לפיכך,  $P(S < \infty) = 1$  אם ורק אם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2$  מתכנס.  $\square$

## חלק ב'

### שאלה 3

נכון או לא נכון: תהי  $X, X_1, X_2, \dots$  סדרת משתנים מקריים בלתי-תלויים ושווי-התפלגות. אם לכל  $t \in \mathbb{R}$  מתקיים  $P(X < t) < 1$ , אזי  $P(X_n < \max_{1 \leq i \leq n-1} X_i \text{ i.o.}) = 1$ .

**פתרון**

נשים לב כי  $P(X_n < \max_{1 \leq i \leq n-1} X_i \text{ i.o.}) = 1$  משמעותו שעבור אינסוף  $n$ ים, המשתנה המקרי  $X_n$  קטן מאחד לפחות מבין  $\{X_1, \dots, X_{n-1}\}$ . תנאי מספיק לכך הוא שקיים  $n_0 \in \mathbb{N}$  מסוים כך ש- $X_n < X_{n_0}$  עבור אינסוף  $n$ ים. נפריד למקרים:

1. ל- $X$  יש לפחות שני אטומים, כלומר הוא מקבל לפחות שני ערכים  $a, b$ , כאשר  $a < b$ , בהסתברות חיובית. ברור כי כל אחד מהערכים יופיע אינסוף פעמים בסדרה. יהי  $n_0$  האינדקס הראשון המקיים  $X_{n_0} = b$ , אז קיימים אינסוף  $n$ ים כך ש- $X_n = a < b = X_{n_0}$ , כנדרש.

2. ל- $X$  יש רק אטום אחד, כלומר הוא מקבל ערך כלשהו  $c$  בהסתברות חיובית. לא יכול להיות ש- $c$  יתקבל בהסתברות 1, כי אז  $P(X < c + 1) = 1$  בסתירה לנתון. מאחר שיש רק אטום אחד, חייב להיות קטע רציף לא מנוון  $[a, b]$ ,  $a < b$ , כך ש- $X$  מקבל ערכים בקטע כולו בהסתברות חיובית. לפיכך מקרה זה שקול למקרה השלישי שלהלן.

3. ל- $X$  אין אטומים. אז חייב להיות קטע רציף לא מנוון  $[a, b]$ ,  $a < b$ , כך ש- $X$  מקבל ערכים בקטע כולו בהסתברות חיובית. יהי  $n_0$  האינדקס הראשון המקיים  $X_{n_0} \geq \frac{b-a}{2}$ , אז מאחר ש- $X$  מקבל ערכים בקטע  $[a, \frac{b-a}{2}]$  כולו בהסתברות חיובית, קיימים אינסוף  $n$ ים כך ש- $X_n < X_{n_0}$ , כנדרש.  $\square$

### שאלה 4

נכון או לא נכון: אם  $\sum_{i=1}^{\infty} P(X > i^2) < \infty$  אזי  $E(X^2) < \infty$ .

## פתרון

נפריך את הטענה באמצעות דוגמה נגדית. ידוע כי:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

יהי  $X$  משתנה מקרי בדיד המקבל רק ערכים שלמים שליליים ומקיים לכל  $n \in \mathbb{N}$ :

$$P(X = -n) = \frac{6}{\pi^2 n^2}$$

קל לראות כי סכום ההסתברויות של כל הערכים ש- $X$  יכול לקבל הוא בדיוק 1. כמו כן ברור כי:

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(X > i^2) = 0 < \infty$$

אך מצד שני:

$$E(X^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (-n)^2 \cdot \frac{6}{\pi^2 n^2} = \infty$$

□

בסתירה לטענה.

## שאלה 5

נכון או לא נכון: יהיו  $X_1, X_2, \dots$  משתנים מקריים בלתי-תלויים כך שכל אחד מהם מתפלג אחיד בקטע שאורכו אינו עולה על 100. נסמן  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . אזי קיימת סדרת מספרים  $a_1, a_2, \dots$  כך ש:

$$P\left(\limsup_n \left| \frac{S_n}{n} - a_n \right| < 10\right) = 1$$

## פתרון

נגדיר:

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i)$$

לכל  $n$ , יהי  $L_n$  אורך הקטע ש- $X_n$  מתפלג עליו. אז:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{Var}(X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{L_n^2}{12} \leq \frac{100^2}{12} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

כלומר, מתקיים תנאי קולמוגורוב ולכן לפי הגרסה הכללית של חוק המספרים הגדולים:

$$P\left(\frac{S_n}{n} - a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0\right) = P\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - E(X_i)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0\right) = 1$$

מכאן מתקיים לכל  $\varepsilon > 0$ :

$$P\left(\limsup_n \left| \frac{S_n}{n} - a_n \right| < \varepsilon\right) = 1$$

בפרט, עבור  $\varepsilon = 10$ :

$$P\left(\limsup_n \left| \frac{S_n}{n} - a_n \right| < 10\right) = 1$$

□

ובכך הוכחנו את הטענה.

## שאלה 6

נכון או לא נכון: עורכים סדרה אינסופית של ניסויים עוקבים. בפעם ה- $n$ ית מוציאים כדור מתוך כד שבו  $n$  לבנים ואחד שחור. יהי  $A$  המאורע שבו הוצאו לפחות עשרה כדורים שחורים. ההסתברות של  $A$  היא גדולה ממש  $0$  וקטנה ממש  $1$ .

### פתרון

(נניח כי הניסויים בלתי-תלויים). יהי  $A_n$  המאורע שבו הוצא כדור שחור בניסוי מספר  $n$ . אז:

$$P(A_n) = \frac{1}{n+1} \implies \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \implies P\left(\limsup_n A_n\right) = P(A_n \text{ infinitely often}) = 1$$

לפי הלמה השנייה של בורל וקנטלי. לפיכך, לא רק שהוצאו לפחות עשרה כדורים שחורים בהסתברות  $1$  - הוצאו אינסוף כאלה בהסתברות  $1$ !

□

## שאלה 7

נכון או לא נכון: יהי  $X$  משתנה מקרי אחיד בקטע  $[0, 2]$  ו- $Y$  משתנה מקרי מעריכי עם פרמטר  $1$ . אז בהכרח  $P(X + Y > 2) < 0.5$ .

### פתרון

נבנה תלות בין המשתנים כדלקמן:

$$\begin{aligned} X \in \left[1, \frac{3}{2}\right) &\implies Y \in \left[\frac{11}{8}, \infty\right) \\ X \in \left[\frac{3}{2}, 2\right] &\implies Y \in \left[\frac{5}{8}, \frac{11}{8}\right) \end{aligned}$$

תלות כזו היא אפשרית מפני ש:

$$\begin{aligned} P\left(Y \in \left[\frac{11}{8}, \infty\right)\right) &= e^{-11/8} \approx 0.253 > \frac{1}{4} = P\left(X \in \left[1, \frac{3}{2}\right)\right) \\ P\left(Y \in \left[\frac{5}{8}, \frac{11}{8}\right)\right) &= e^{-5/8} - e^{-11/8} \approx 0.282 > \frac{1}{4} = P\left(X \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]\right) \end{aligned}$$

ועקרונית ניתן להתאים גם ערכי  $X$  בתחום  $[0, 1)$  לערכי  $Y$  המתאימים כדי לפצות על ההפרשים  $e^{-11/8} - \frac{1}{4}$  ו- $e^{-5/8} - e^{-11/8} - \frac{1}{4}$  בין ההסתברויות. כעת, מתקיים:

$$\begin{aligned} P(X + Y > 2) &= P\left(X \in \left[1, \frac{3}{2}\right)\right) P\left(X + Y > 2 \mid X \in \left[1, \frac{3}{2}\right)\right) \\ &\quad + P\left(X \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]\right) P\left(X + Y > 2 \mid X \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]\right) \\ &\quad + P(X \in [0, 1)) P(X + Y > 2 \mid X \in [0, 1)) \\ &= \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} P(X + Y > 2 \mid X \in [0, 1)) \\ &\geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

□

לפיכך הטענה לא נכונה.

## שאלה 8

נכון או לא נכון: תהי סדרת משתנים מקריים בלתי-תלויים ושווי-התפלגות כך ש-  
 $E(|X|) < \infty$  אזי  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = 0$  כמעט תמיד.

### פתרון

מטענה שהוכחנו בכיתה, אם  $Y \geq 0$  ו- $E(Y) < \infty$  אז:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(Y > n) < \infty$$

יהי  $\varepsilon > 0$ , אז  $E\left(\left|\frac{X}{\varepsilon}\right|\right) < \infty$  ולכן:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P\left(\left|\frac{X}{\varepsilon}\right| > n\right) < \infty \implies \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\left|\frac{X}{n}\right| > \varepsilon\right) < \infty$$

מכך ש- $\{X_n\}$  שווי-התפלגות נסיק כי:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P\left(\left|\frac{X_n}{n}\right| > \varepsilon\right) < \infty$$

כעת מהלמה הראשונה של בורל וקנטלי:

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\left|\frac{X_n}{n}\right| > \varepsilon\right)\right) = 0$$

לכן:

$$P\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\left|\frac{X_n}{n}\right| \leq \varepsilon\right)\right) = 1$$

כלומר, החל מ- $n$  מסוים מתקיים  $\left|\frac{X_n}{n}\right| \leq \varepsilon$ , ולכן:

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = 0\right) = 1$$

□

והטענה נכונה.