מבוא לחלקיקים וגרעין:
פתרון מבחן מועד א' תשע"א

גרסה 1.0, ספטמבר 2011

ברק שושני
baraksh@gmail.com | http://baraksh.co.il/

שאלה 1

א. משוואת הגלים של שרדינגר מתארת השתנות בזמן של מצב קוונטי לא־יחסותי. הסבירו את ההקבלה בין משוואת שרדינגר למשוואת קליין־גורדון במקרה היחסותי. מהי הבעייתיות העיקרית שמציגה משוואת קליין־גורדון?

ב. נטפל בבעיית פיזור אלקטרון על פרוטון. נתחיל בקירוב של פיזור רתרפורד. מהם הקירובים שנניח לשם כך? מהו ההבדל בין חישוב רתרפורד לחישוב מוט? בשלב זה, הגיע הזמן לבצע מדידה. כיצד נוכל מתוצאות המדידה ללמוד על קבוע המבנה וצפיפות המטען של הפרוטון?

ג. הסבירו את המושג Helicity (בורגיות). מה ניתן ללמוד על חוקי השימור באינטראקציות חלשות מהפעלת אופרטורי Parity (זוגיות) ו/או Charge Conjugation (צימוד מטען) על חלקיקי נייטרינו?

ד. רשמו ארבע דוגמאות לאינטראקציות המאפשרות למדוד את האיברים השונים במטריצת Cabibbo-Kobayashi-Maskawa, אחת לכל איבר. ניתן להדגים באמצעות דיאגרמות פיינמן.

ה. תנועת הנוקליאונים בגרעין: כיצד נעריך את אנרגיית פרמי על־פי מודל גז פרמי?

פתרון סעיף א'

נשתמש ביחידות טבעיות, $\hbar = c \equiv 1$. במקרה הלא־יחסותי מתקיים, עבור חלקיק חופשי, הקשר הבא בין האנרגיה והתנע:

$$E = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m}$$

נחליף את הגדלים באופרטורים:

$$E = \mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \mathbf{p} = -\mathrm{i}\,\boldsymbol{\nabla}$$

ונקבל את משוואת שרדינגר:

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\nabla^2}{2m}\psi$$

במקרה היחסותי מתקיים:

$$E^2 = |\mathbf{p}|^2 + m^2$$

נחליף שוב את הגדלים באופרטורים ונקבל את משוואת קליין־גורדון:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi - \nabla^2\psi = -m^2\psi$$

הבעיה במשוואת קליין־גורדון היא שלפתרונות יכולה להיות אנרגיה חיובית $E = +\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$ או אנרגיה שלילית $E = -\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$. ניתן לפתור את הבעיה אם מניחים שהפתרונות בעלי אנרגיה שלילית מתאימים לחלקיקים בעלי אותה מסה, אך בעלי מטען הפוך - כלומר, אנטי־חלקיקים. $\square$

פתרון סעיף ב'

בחישוב רתרפורד נניח כי האלקטרון לא־יחסותי, חסר מסה וחסר ספין, וכן כי הפרוטון לא זז כתוצאה מהפיזור. בחישוב מוט נניח כי האלקטרון יחסותי, בעל מסה m ובעל ספין $1/2$, אך הפרוטון עדיין נשאר במקום. חתך הפעולה הדיפרנציאלי לפיזור יהיה:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{Mott}}\left|F\left(q^2\right)\right|^2$$

כאשר $F\left(q^2\right)$ היא פונקציית המבנה של הפרוטון, שהיא טרנספורם פורייה של צפיפות המטען בתוך הפרוטון:

$$F\left(q^2\right)=\int\rho\left(\mathbf{r}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}\,\mathrm{d}^3\mathbf{r}$$

$q^2\equiv|\mathbf{q}|^2$ הוא גודל ה־4־תנע שהועבר (ע"י פוטון וירטואלי); ככל ש־q^2 גדול יותר, כך אנו "נכנסים עמוק יותר" לתוך הפרוטון. לאחר שמדדנו את $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}$ נחלק ב־$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{Mott}}$, אשר ערכו ידוע, ונקבל את פונקציית המבנה. ע"י ביצוע טרנספורם פורייה הפוך לפונקציית המבנה נוכל לקבל את צפיפות המטען של הפרוטון, ולגלות כי היא אינה אחידה. $\square$

פתרון סעיף ג'

נסמן ב־s את הספין של החלקיק וב־m_s את הטלת הספין על כיוון התנועה של החלקיק. אז הגודל $h\equiv m_s/s$ נקרא **הבורגיות** של החלקיק. בפרט, עבור חלקיק בעל ספין חצי הבורגיות יכולה להיות $+1$ (בורגיות ימנית) או -1 (בורגיות שמאלית). לחלופין, נגדיר את כיוון הספין של חלקיק בתור הכיוון החיובי של ציר z כאשר הסיבוב הוא נגד כיוון השעון במישור xy, במערכת צירים ימנית. אז הבורגיות של חלקיק היא ימנית אם הספין הוא בכיוון התנועה של החלקיק, ושמאלית אם הוא מנוגד לו.

אם החלקיק חסר־מסה, אז הבורגיות שלו תהיה זהה בכל מערכות הייחוס. אם יש לו מסה, אז הבורגיות שלו עשויה להיות ימנית במערכת ייחוס אחת, ושמאלית באחרת (כי כיוון התנועה מתהפך כאשר הצופה נע מהר יותר מהחלקיק). בנוסף, עבור חלקיק חסר־מסה, הבורגיות שווה ל**ידיות** (Chirality). אנו נניח כי הנייטרינו חסר־מסה, ולכן יש לו בורגיות מוגדרת. בניסויים נמצא כי חלקיקי נייטרינו הם תמיד בעלי בורגיות שמאלית, ואילו אנטי־נייטרינו הם תמיד בעלי בורגיות ימנית.

אופרטור הזוגיות P מקיים $P\left(\mathbf{v}\right)=-\mathbf{v}$ אם $\mathbf{v}$ הוא וקטור רגיל, ו־$P\left(\mathbf{a}\right)=\mathbf{a}$ אם $\mathbf{a}$ הוא פסבדו־וקטור (למשל מכפלה וקטורית של שני וקטורים רגילים, $\mathbf{a}\equiv\mathbf{v}\times\mathbf{w}$); בנוסף הוא מקיים $P\left(c\right)=c$ אם c הוא סקלר רגיל, ו־$P\left(p\right)=-p$ אם הוא פסבדו־סקלר (למשל מכפלה סקלרית של וקטור עם פסבדו־וקטור, $p\equiv\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}$). נשים לב כי $P^2=I$ (אופרטור הזהות), לפיכך הערכים העצמיים של P הם ±1. הזוגיות של מערכת חלקיקים במצב היסוד היא מכפלת ערכי הזוגיות של כל החלקיקים. עבור מערכת מעוררת של שני חלקיקים יש להכפיל ב־$(-1)^l$, כאשר l הוא התנע הזוויתי המסלולי.

הכוח החזק והכוח האלקטרומגנטי משמרים את הזוגיות, כלומר, הם סימטריים לפעולה של אופרטור הזוגיות. אך הכוח החלש אינו משמר את הזוגיות. ניתן לראות זאת, למשל, בדעיכה של פאיון ($\pi^+\to\mu^++\nu_\mu$), המתרחשת באמצעות אינטראקציה חלשה. מכיוון שלפאיון ספין 0, הספין של הנייטרינו חייב להיות בכיוון מנוגד לזה של האנטי־מיואון (כדי לבטל אותו). אך גם כיוון התנועה שלו מנוגד לזה של האנטי־מיואון, ולכן בהכרח תהיה לשניהם אותה בורגיות. אם הזוגיות הייתה נשמרת, היינו מצפים שגם התהליך בו האנטי־מיואון והנייטרינו הם ימניים וגם התהליך בו שניהם הם שמאליים (אשר מתקבל מהתהליך הקודם באמצעות הפעלת P) יופיעו בטבע באותה תדירות. בפועל, רק התהליך בו שני החלקיקים הם בעלי בורגיות שמאלית נצפה בטבע.

אופרטור צימוד המטען C מעביר חלקיק לאנטי־חלקיק שלו, $C\left|p\right\rangle=\left|\overline{p}\right\rangle$. כלומר, הוא משנה את סימנם של המספרים הקוונטיים "הפנימיים" - מטען חשמלי, מספר בריוני ולפטוני, טעמים (s, c, b ו־t) והטלת האיזוספין - אך לא את המסה, האנרגיה, התנע והספין. גם כאן הערכים העצמיים האפשריים הם ±1, אך רק חלקיקים שהם האנטי־חלקיקים של עצמם (כמו פוטונים ומזונים מסוימים, למשל π^0) יכולים להוות מצבים עצמיים של C. מערכת של חלקיק בעל ספין $1/2$ והאנטי־חלקיק שלו מהווה מצב עצמי של C עם ערך עצמי $(-1)^{l+s}$ כאשר l הוא התנע הזוויתי ו־s הוא הספין הכולל.

בדומה לזוגיות, הכוח החזק והכוח האלקטרומגנטי משמרים את צימוד המטען, אך הכוח החלש לא משמר אותו. אם נפעיל את C על נייטרינו (שהוא, כאמור, תמיד בעל בורגיות שמאלית) נקבל אנטי־נייטרינו בעל בורגיות שמאלית - וחלקיק כזה לא נצפה בטבע. לפיכך, התהליך הצמוד לכל תהליך שכולל נייטרינו (ולכן הוא בהכרח מתבצע באמצעות האינטראקציה החלשה) לא יכול להתרחש. דוגמה לכך הוא התהליך הצמוד להתפרקות פאיון אשר הוזכרה למעלה ($\pi^-\to\mu^-+\overline{\nu}_\mu$). אנו נצפה לקבל בניסוי מיואון בעל בורגיות שמאלית (כמו שהייתה לאנטי־מיואון לפני שהפעלנו את C), אך למעשה נקבל רק מיואונים בעלי בורגיות ימנית, מכיוון שהאנטי־נייטרינו חייבים להיות בעל בורגיות ימנית.

לבסוף, נתבונן בהפעלה עוקבת של P ו־C: אופרטור CP. על־פניו, נראה שהכוח החלש אמור לשמר CP, מכיוון שלמשל נייטרינו בעל בורגיות שמאלית יהפוך לאחר הפעלה של CP לאנטי־נייטרינו בעל בורגיות ימנית ולהפך. אך נתבונן במזון K^0. המזון עשוי להפוך לאנטי־חלקיק שלו, $\overline{K}^0$, באמצעות אינטראקציה חלשה. מתקיים:

$$P|K^0\rangle=-|K^0\rangle,\qquad P|\overline{K}^0\rangle=-|\overline{K}^0\rangle,\qquad C|K^0\rangle=|\overline{K}^0\rangle,\qquad C|\overline{K}^0\rangle=|K^0\rangle$$

ולכן:

$$CP|K^0\rangle = -|\overline{K}^0\rangle, \qquad CP|\overline{K}^0\rangle = -|K^0\rangle$$

לפיכך נוכל ליצור מצבים עצמיים (מנורמלים) של CP כך:

$$|K_1\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|K^0\rangle - |\overline{K}^0\rangle\right), \qquad |K_2\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|K^0\rangle + |\overline{K}^0\rangle\right)$$

כאשר:

$$CP|K_1\rangle = |K_1\rangle, \qquad CP|K_2\rangle = -|K_2\rangle$$

אם נניח כי CP נשמר באינטראקציה חלשה, אז K_1 יכול לדעוך רק למצב בעל $CP=+1$, ואילו K_2 יכול לדעוך רק למצב בעל $CP=-1$. לרוב, קאונים נייטרליים דועכים לשניים ($CP=+1$) או שלושה ($CP=-1$) פאיונים. לפיכך נצפה כי K_1 ידעך רק לשני פאיונים ו־K_2 לשלושה. הדעיכה לשני פאיונים היא מהירה בהרבה, מכיוון שיש בה יותר אנרגיה חופשית. לכן, אם נתחיל עם אלומה של K^0:

$$|K^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|K_1\rangle + |K_2\rangle\right)$$

רכיב ה־K_1 ידעך במהרה, וניוותר עם אלומה של K_2 בלבד. ליד המקור נצפה לקבל הרבה דעיכות לשני פאיונים, והרחק ממנו נצפה לקבל דעיכות לשלושה פאיונים בלבד. אך בניסוי שערכו Cronin & Fitch נמדד, הרחק מהמקור, מספר קטן של אירועי דעיכה לשני פאיונים - בסתירה להנחתנו. לפיכך האינטראקציה החלשה אינה משמרת CP בצורה מושלמת.$\square$

פתרון סעיף ד'

מטריצת CKM היא מטריצה אוניטרית המוגדרת כך:

$$\begin{pmatrix} |d'\rangle \\ |s'\rangle \\ |b'\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |d\rangle \\ |s\rangle \\ |b\rangle \end{pmatrix}$$

כאשר $|V_{xy}|^2$ מייצג את ההסתברות שקווארק מסוג x ידעך לקווארק מסוג y (או להפך) באינטראקציה חלשה.

את V_{ud} ניתן למדוד באמצעות האינטראקציה:

$$n\,(udd) \to p\,(udu) + e^- + \overline{\nu}_e$$

את V_{us} ניתן למדוד באמצעות:

$$K_L^0\left(\frac{d\overline{s}+s\overline{d}}{\sqrt{2}}\right) \to \pi^+\,(u\overline{d}) + e^- + \overline{\nu}_e \text{ or } \pi^-\,(d\overline{u}) + e^+ + \nu_e$$

את V_{cs} ניתן למדוד באמצעות:

$$D^0\,(c\overline{u}) \to K^-\,(s\overline{u}) + e^+ + \nu_e$$

ואת V_{cb} ניתן למדוד באמצעות:

$$B^-\,(b\overline{u}) \to D^0\,(c\overline{u}) + e^- + \overline{\nu}_e \qquad \square$$

פתרון סעיף ה'

אנו מניחים כי הפרוטונים והנייטרונים נעים בחופשיות בתוך נפח V. אנרגיית פרמי היא האנרגיה של הרמה המאוכלסת המלאה הגבוהה ביותר. הקשר (הלא־יחסותי) בין אנרגיית פרמי E_F ותנע פרמי p_F הוא:

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m}$$

כאשר m היא מסת הנוקליאון. נניח כי בגרעין יש A נוקליאונים, מתוכם חצי נייטרונים וחצי פרוטונים, וכל רמות האנרגיה של הפרוטונים והנייטרונים מאוכלסות במלואן עד הקליפה האחרונה. הרדיוס האופייני של הפוטנציאל של הנוקליאונים הוא $r_0 \approx 1.2\,\mathrm{fm}$. מספר הנוקליאונים מכל סוג יהיה הנפח הפיזיקלי $V = \frac{4\pi}{3}Ar_0^3$, כפול הנפח במרחב התנע $V_p = \frac{4\pi}{3}p_F^3$, כפול 2 (כי שני פרמיונים יכולים לאכלס את אותו מצב, עם ספינים מנוגדים), לחלק לנפח $h^3 = (2\pi\hbar)^3$ במרחב הפאזה:

$$\frac{A}{2} = \frac{4\pi}{3}Ar_0^3 \cdot \frac{4\pi}{3}p_F^3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{4Ar_0^3}{9\pi\hbar^3}p_F^3$$

מכאן:

$$p_F = \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3}\frac{\hbar}{r_0}$$

ולכן:

$$E_F = \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{2/3}\frac{\hbar^2}{2mr_0^2}$$

$\square$

שאלה 2

א. הסבירו מהם שני התהליכים המרכזיים הגורמים להיווצרות מפל אלקטרומגנטי (Electromagnetic Shower) בגלאים מסוג קלורימטר אלקטרומגנטי: תהליך אחד עבור אלקטרונים/פוזיטרונים אנרגטיים ותהליך שני עבור פוטונים אנרגטיים, כאשר לכל אחד מהתהליכים קיימות שתי דיאגרמות פיינמן אפשריות. ציירו את הדיאגרמות הרלוונטיות.

ב. המפל ייעצר כאשר לכל החלקיקים שנוצרו תהיה אנרגיה שווה או קטנה מהאנרגיה הקריטית E_C, האופיינית לחומר ממנו עשוי הגלאי. לצורך הפשטה נבנה את המודל למפל באופן הבא:

i. אלקטרון/פוזיטרון עם אנרגיה $E > E_C$ עובר מרחק קרינה אחד ומאבד חצי מהאנרגיה שלו דרך פליטה של פוטון.

ii. פוטון עם אנרגיה $E > E_C$ עובר מרחק קרינה אחד ומאבד את כל האנרגיה שלו דרך יצירת זוג אלקטרון-פוזיטרון, כאשר האנרגיה מחולקת שווה בשווה ביניהם.

iii. אלקטרון/פוזיטרון עם אנרגיה $E < E_C$ מפסיק לפלוט פוטונים.

iv. פוטון עם אנרגיה $E < E_C$ מפסיק ליצור זוגות.

הניחו כי מרחק הקרינה של האלקטרון והפוזיטרון זהה לזה של הפוטון. מצאו כמה חלקיקים (פוטונים, אלקטרונים ופוזיטרונים) יתקבלו לאחר n מאחרי קרינה ומה תהיה האנרגיה של כל אחד מהחלקיקים במצב הזה עבור אלקטרון הנכנס לגלאי עם אנרגיה $E_0 > E_C$. בטאו את תשובתכם במונחים של n ושל E_0.

ג. מצאו את מספר הצעדים המרבי $n_{\max}$ שעבורו המפל ייעצר וחשבו את מספר החלקיקים, $N_{\max}$, במצב זה במונחים של E_0 ושל E_C.

פתרון סעיף א'

התהליך הראשון נקרא קרינת בלימה (Bremsstrahlung), ובו נפלטת קרינה אלקטרומגנטית מחלקיק טעון (אלקטרון או פוזיטרון) שמאט את מהירותו:

$$\begin{array}{cccc} & e^- & \leftrightarrow & \gamma \\ & & \rightarrow & e^- \\ (\gamma) & \updownarrow & & \\ \rightrightarrows & O & \rightrightarrows & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cccc} & e^+ & \leftrightarrow & \gamma \\ & & \leftarrow & e^+ \\ (\gamma) & \updownarrow & & \\ \rightrightarrows & O & \rightrightarrows & \end{array}$$

כאשר (γ) הוא פוטון וירטואלי ו-O מייצג חומר. התהליך השני נקרא יצירת זוגות (Pair Production) ובו פוטון מתפרק לאלקטרון ופוזיטרון:

$$\begin{array}{ccc} & & e^- \\ & \nearrow & \\ \gamma & & \\ & \nwarrow & \\ & & e^+ \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & & e^+ \\ & \swarrow & \\ \gamma & & \\ & \searrow & \\ & & e^- \end{array}$$

$\square$

פתרון סעיף ב'

נצייר את המפל בשלושת מרחקי הקרינה הראשונים, עבור אלקטרון הנכנס לגלאי עם אנרגיה $E_0 > E_C$:

$$
\begin{array}{ccccccc}
n=0 & & n=1 & & n=2 & & n=3 \\
 & & & & & & \\
e^- & \rightarrow & \gamma & \rightarrow & e^- & \leftrightarrow & \gamma \\
 & & & & & \rightarrow & e^- \\
 & & & \leftarrow & e^+ & \leftrightarrow & \gamma \\
 & & & & & \leftarrow & e^+ \\
 & & e^- & \rightarrow & \gamma & \rightarrow & e^- \\
 & & & & & \leftarrow & e^+ \\
 & & & \rightarrow & e^- & \rightarrow & \gamma \\
 & & & & & \rightarrow & e^-
\end{array}
$$

מכאן ברור כי מספר החלקיקים לאחר n מרחקי קרינה יהיה 2^n, והאנרגיה של כל אחד מהם תהיה $E_0/2^n$. $\square$

פתרון סעיף ג'

המפל ייעצר כאשר האנרגיה של כל חלקיק תגיע לאנרגיה הקריטית:

$$\frac{E_0}{2^{n_{\max}}} = E_C \quad \Longrightarrow \quad n_{\max} = \log_2 \frac{E_0}{E_C}$$

לפיכך מספר החלקיקי המרבי יהיה:

$$N_{\max} = 2^{n_{\max}} = \frac{E_0}{E_C} \qquad \square$$

שאלה 3

בסעיפים הבאים, אילו מהתהליכים אינו אפשרי ומדוע? אם תהליך מסוים אפשרי, ציינו באילו אינטראקציות. ציינו במפורש אם קיים תנאי מגביל כלשהו לקיום התהליך, או אם התהליך אפשרי עקרונית אבל יהיה נדיר מאוד.

א. $\pi^- + n \to \Xi^- + K^0 + K^0$

ב. $K^- + p \to \Xi^0 + K^0$

ג. $K^- + p \to \Xi^0 + \overline{K}^0$

ד. $K^- + p \to \pi^0 + \Lambda$

ה. $K^+ + \pi^- \to \nu_e + \nu_e$

ו. $e^- + e^+ \to p + \pi^0 + \pi^-$

ז. $K^0 \to \overline{K}^0$ (אם אפשרי, ציירו את הדיאגרמה)

ח. $\Sigma^+ \to n + e^+ + \nu_e$ (ציירו דיאגרמה אחת לפחות וכתבו מהו קבוע הפרופורציה של האמפליטודה. שימו לב ש־$g_{ud} = g_W \cos\theta_C$ בעוד ש־$g_{us} = g_W \sin\theta_C$, כאשר $\theta_C \approx 13^\circ$)

פתרון סעיף א'

להלן מידע על המספרים הקוונטיים השונים והאינטראקציות השומרות אותם:

- מטען חשמלי Q, מספר בריוני B, מספר לפטוני L: נשמרים בכל סוגי האינטראקציות.
- הטלת האיזוספין I_3, מוזרות S, זוגיות P, צימוד מטען C: נשמרים באינטראקציות חזקות ואלקטרומגנטיות בלבד.
- איזוספין I: נשמר באינטראקציות חזקות בלבד.

התהליך: $\pi^- + n \to \Xi^- + K^0 + K^0$.

חלקיק	מסה ב־MeV	קווארקים	Q	B	L	I, I_3	S	J^{PC}
π^-	140	$d\overline{u}$	-1	0	0	$1, -1$	0	0^-
n	940	udd	0	1	0	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}^+$
Ξ^-	1320	dss	-1	1	0	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	-2	$\frac{1}{2}^+$
K^0	500	$d\overline{s}$	0	0	0	$\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$	1	0^-

- מטען חשמלי: -1 בהתחלה ובסוף, נשמר.
- מספר בריוני: 1 בהתחלה ובסוף, נשמר.
- מספר לפטוני: 0 בהתחלה ובסוף, נשמר.
- הטלת האיזוספין: $-\frac{3}{2}$ בהתחלה ו־$+\frac{1}{2}$ בסוף, **לא נשמרת**. לכן האינטראקציה חייבת להיות **חלשה**. □

פתרון סעיף ב'

התהליך: $K^- + p \to \Xi^0 + K^0$

חלקיק	מסה ב־MeV	קווארקים	Q	B	L	I, I_3	S	J^{PC}
K^-	490	$s\overline{u}$	-1	0	0	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	-1	0^-
p	940	uud	$+1$	1	0	$\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}^+$
Ξ^0	1310	uss	0	1	0	$\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$	-2	$\frac{1}{2}^+$
K^0	500	$d\overline{s}$	0	0	0	$\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$	1	0^-

- מטען חשמלי: 0 בהתחלה ובסוף, נשמר.
- מספר בריוני: 1 בהתחלה ובסוף, נשמר.
- מספר לפטוני: 0 בהתחלה ובסוף, נשמר.
- הטלת האיזוספין: 0 בהתחלה ו־1 בסוף, **לא נשמרת**. לכן האינטראקציה חייבת להיות **חלשה**. □

פתרון סעיף ג'

התהליך: $K^- + p \to \Xi^0 + \overline{K}^0$

חלקיק	מסה ב־MeV	קווארקים	Q	B	L	I, I_3	S	J^{PC}
K^-	490	$s\overline{u}$	-1	0	0	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	-1	0^-
p	940	uud	$+1$	1	0	$\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}^+$
Ξ^0	1310	uss	0	1	0	$\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$	-2	$\frac{1}{2}^+$
$\overline{K}^0$	500	$s\overline{d}$	0	0	0	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	-1	0^-

- מטען חשמלי: 0 בהתחלה ובסוף, נשמר.
- מספר בריוני: 1 בהתחלה ובסוף, נשמר.
- מספר לפטוני: 0 בהתחלה ובסוף, נשמר.
- הטלת האיזוספין: 0 בהתחלה ובסוף, נשמרת.
- מוזרות: -1 בהתחלה ו־-3 בסוף, **לא נשמרת**. לכן האינטראקציה חייבת להיות **חלשה**. נשים לב כי $|\Delta S| = 1$, לכן התהליך הוא מסדר שני, ויהיה נדיר יחסית. □

פתרון סעיף ד'

התהליך: $K^- + p \to \pi^0 + \Lambda$

חלקיק	מסה ב־MeV	קווארקים	Q	B	L	I, I_3	S	J^{PC}
K^-	490	$s\bar{u}$	-1	0	0	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	-1	0^-
p	940	uud	$+1$	1	0	$\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}^+$
π^0	130	$\left(u\bar{u} - d\bar{d}\right)/\sqrt{2}$	0	0	0	$1, 0$	0	0^{-+}
Λ	1120	uds	0	1	0	$0, 0$	-1	$\frac{1}{2}^+$

- מטען חשמלי: 0 בהתחלה ובסוף, נשמר.
- מספר בריוני: 1 בהתחלה ובסוף, נשמר.
- מספר לפטוני: 0 בהתחלה ובסוף, נשמר.
- הטלת האיזוספין: 0 בהתחלה ובסוף, נשמרת.
- מוזרות: -1 בהתחלה ובסוף, נשמרת.
- זוגיות: $(-1)(+1)(-1)^{L_i} = -(-1)^{L_i}$ לפני ו־$(-1)(+1)(-1)^{L_f} = -(-1)^{L_f}$ אחרי, נשמרת אם $L_i = L_f$.
- צימוד מטען: לא רלוונטי - המצב ההתחלתי והסופי אינם מצבים עצמיים של C.
- איזוספין: $0, 1$ לפני ו־1 אחרי, נשמר.

התהליך יכול להתרחש, לפי סדר השכיחויות, באינטראקציה **חזקה**, **אלקטרומגנטית** או **חלשה**. ☐

פתרון סעיף ה'

התהליך: $K^+ + \pi^- \to \nu_e + \nu_e$

חלקיק	מסה ב־MeV	קווארקים	Q	B	L	I, I_3	S	J^{PC}
K^+	490	$u\bar{s}$	1	0	0	$\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$	1	0^-
π^-	140	$d\bar{u}$	-1	0	0	$1, -1$	0	0^-
ν_e	0	$-$	0	0	1	$-$	0	$\frac{1}{2}$

- מטען חשמלי: 0 בהתחלה ובסוף, נשמר.
- מספר בריוני: 0 בהתחלה ובסוף, נשמר.
- מספר לפטוני: 0 בהתחלה ו־2 בסוף, **לא נשמר**. לפיכך האינטראקציה **אסורה**. ☐

פתרון סעיף ו'

התהליך: $e^- + e^+ \to p + \pi^0 + \pi^-$

חלקיק	מסה ב־MeV	קווארקים	Q	B	L	I, I_3	S	J^{PC}
e^-	0.5	$-$	-1	0	1	$-$	0	$\frac{1}{2}$
e^+	0.5	$-$	$+1$	0	-1	$-$	0	$\frac{1}{2}$
p	940	uud	$+1$	1	0	$\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}^+$
π^0	130	$\left(u\bar{u} - d\bar{d}\right)/\sqrt{2}$	0	0	0	$1, 0$	0	0^{-+}
π^-	140	$d\bar{u}$	-1	0	0	$1, -1$	0	0^-

- מטען חשמלי: 0 בהתחלה ובסוף, נשמר.
- מספר בריוני: 0 בהתחלה ו־1 בסוף, **לא נשמר**. לפיכך האינטראקציה **אסורה**. ☐

פתרון סעיף ז'

התהליך: $K^0 \to \overline{K}^0$

חלקיק	מסה ב־MeV	קווארקים	Q	B	L	I, I_3	S	J^{PC}
K^0	500	$d\overline{s}$	0	0	0	$\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$	1	0^-
$\overline{K}^0$	500	$s\overline{d}$	0	0	0	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	-1	0^-

- מטען חשמלי: 0 בהתחלה ובסוף, נשמר.
- מספר בריוני: 0 בהתחלה ובסוף, נשמר.
- מספר לפטוני: 0 בהתחלה ובסוף, נשמר.
- הטלת האיזוספין: $+\frac{1}{2}$ בהתחלה ו־$-\frac{1}{2}$ בסוף, **לא נשמרת**. לפיכך האינטראקציה חייבת להיות **חלשה**.

הדיאגרמה:

$$\begin{array}{ccccc} d & \rightarrow & u & \rightarrow & s \\ & \downarrow & & \uparrow & \\ & W^- & & W^- & \\ & \downarrow & & \uparrow & \\ \overline{s} & \leftarrow & \overline{u} & \leftarrow & \overline{d} \end{array}$$

$\square$

פתרון סעיף ח'

התהליך: $\Sigma^+ \to n + e^+ + \nu_e$

חלקיק	מסה ב־MeV	קווארקים	Q	B	L	I, I_3	S	J^{PC}
Σ^+	1190	uus	$+1$	1	0	$1, +1$	-1	$\frac{1}{2}^+$
n	940	udd	0	1	0	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}^+$
e^+	0.5	$-$	$+1$	0	-1	$-$	0	$\frac{1}{2}$
ν_e	0	$-$	0	0	1	$-$	0	$\frac{1}{2}$

- מטען חשמלי: 1 בהתחלה ובסוף, נשמר.
- מספר בריוני: 1 בהתחלה ובסוף, נשמר.
- מספר לפטוני: 0 בהתחלה ובסוף, נשמר.

האינטראקציה חייבת להיות חלשה, מכיוון שמשתתף בה נייטרינו. לפיכך כל שאר המספרים הקוונטיים לא רלוונטיים.

דיאגרמה אפשרית היא:

$$\begin{array}{ccccccc} u & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & u & & \\ & & & & & & \\ u & \rightarrow & d & \rightarrow & d & & \\ & & \downarrow & & & & \\ & & W^+ & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ s & \rightarrow & u & \rightarrow & d & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & W^+ & \rightarrow & e^+ \\ & & & & & \rightarrow & \nu_e \end{array}$$

בדיאגרמה ארבעה קדקודים: בשניים מהם יש מעבר מ־u ל־d (לכן הם תורמים פקטור $g_W^2 \cos^2\theta_C$), בשלישי יש מעבר מ־s ל־u (לכן הוא תורם פקטור $g_W \sin\theta_C$) וברביעי משתתפים רק לפטונים, לכן הוא תורם פקטור g_W. בסה"כ, קבוע הפרופורציה של האמפליטודה יהיה $g_W^4 \cos^2\theta_C \sin\theta_C$.

$\square$

שאלה 4

נדון בדעיכת החלקיק $\Delta^+ = uud$: מסה $m = 1232\,\mathrm{MeV}$, ספין־זוגיות $J^P = \frac{3}{2}^+$ ואיזוספין $I, I_3 = \frac{3}{2}, +\frac{1}{2}$.

א. שני תהליכים אפשריים דרכם מתרחשת הדעיכה הם $\Delta^+ \to \pi^+ n$ ו־$\Delta^+ \to \pi^0 p$. ציירו את הדיאגרמות (ברמה הקווארקית) המתאימות לשני התהליכים הנ"ל.

ב. מצאו מהו היחס בין חתכי הפעולה של שני התהליכים הנ"ל, כלומר את $R = \sigma\left(\Delta^+ \to \pi^+ n\right) / \sigma\left(\Delta^+ \to \pi^0 p\right)$.

ג. סמנו את זמן החיים של Δ^+ (שהוא חלקיק לא יציב) ב־τ, ורשמו את פונקציית הגל $\psi\left(t\right)$ של החלקיק במערכת המנוחה שלא (אין צורך לנרמל).

ד. בניסוי פיזור פאיון־נוקליאון ($\pi N \to \Delta^+ \to \pi' N'$ כאשר $N = p \text{ or } n$) ניתן למדוד את המסה של מערכת הפאיון־נוקליאון בכל מאורע. הסבירו בקצרה איך תמדדו זאת.

ה. כאשר מודדים את חתך הפעולה הדיפרנציאלי כתלות במסת מערכת הפאיון־נוקליאון, נצפה רזוננס מתאים לחלקיק Δ^+ בנקודה $E = 1232\,\mathrm{MeV}$. בצעו טרנספורם פורייה לפונקציית הגל שמצאתם ממרחב הזמן למרחב האנרגיה:

$$\Psi\left(E\right) = \int_0^\infty \psi\left(t\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,Et}\,\mathrm{d}t$$

חשבו את ריבוע האמפליטודה במרחב האנרגיה והוכיחו שהתוצאה המתקבלת אכן מתאימה לרזוננס שנצפה בניסוי. הניחו כי ניתן לבצע את האינטגרציה רק בתחום $t \geq 0$.

ו. הניחו כי אפשר לבצע התאמה (fit) לנתונים הניסיוניים בכדי לקבל את כל הפרמטרים של הפונקציה שמצאתם בסעיף האחרון. איך הייתם מעריכים את זמן החיים של החלקיק Δ^+ בעזרת הפרמטרים הנ"ל?

פתרון סעיף א'

התהליך $\Delta^+\left(uud\right) \to \pi^+\left(u\overline{d}\right) + n\left(udd\right)$:

$$\begin{array}{ccccc}
u & \to & u & & \\
u & \to & u & & \\
d & \to & d & & \\
 & \rightsquigarrow & g & \to & d \\
 & & & \to & \overline{d}
\end{array}$$

התהליך $\Delta^+\left(uud\right) \to \pi^0\left(u\overline{u} - d\overline{d}\right) + p\left(uud\right)$:

$$\begin{array}{ccccc}
u & \to & u & & \\
u & \to & u & & \\
d & \to & d & & \\
 & \rightsquigarrow & g & \to & u/d \\
 & & & \to & \overline{u}/\overline{d}
\end{array}$$

$\square$

פתרון סעיף ב'

בבסיס איזוספין מתקיים:

$$\left|\Delta^+\right\rangle = \left|\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}\right\rangle, \qquad \left|\pi^+\right\rangle = \left|1, +1\right\rangle, \qquad \left|\pi^0\right\rangle = \left|1, 0\right\rangle, \qquad \left|p\right\rangle = \left|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right\rangle, \qquad \left|n\right\rangle = \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$$

לפי הטבלאות של מקדמי קלבש־גורדן:

$$\left|\pi^+ + n\right\rangle = \left|1, +1\right\rangle \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} \left|\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$\left|\pi^0+p\right\rangle=|1,0\rangle\left|\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle=-\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle+\sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{3}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle$$

לכן האמפליטודה למעבר מ־$\left\langle\Delta^+\right|$ ל־$\left|\pi^++n\right\rangle$ היא:

$$\left\langle\Delta^+|H|\pi^++n\right\rangle=\left\langle\frac{3}{2},+\frac{1}{2}\right|H\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle+\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{3}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left\langle\frac{3}{2},+\frac{1}{2}\right|H\left|\frac{3}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle\equiv\frac{1}{\sqrt{3}}A$$

והאמפליטודה למעבר מ־$\left\langle\Delta^+\right|$ ל־$\left|\pi^0+p\right\rangle$ היא:

$$\left\langle\Delta^+|H|\pi^0+p\right\rangle=\left\langle\frac{3}{2},+\frac{1}{2}\right|H\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle+\sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{3}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle\right)=\sqrt{\frac{2}{3}}\left\langle\frac{3}{2},+\frac{1}{2}\right|H\left|\frac{3}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle\equiv\sqrt{\frac{2}{3}}A$$

היחס בין חתכי הפעולה יהיה, אם כן:

$$R=\frac{\sigma\left(\Delta^+\to\pi^+n\right)}{\sigma\left(\Delta^+\to\pi^0p\right)}=\frac{\left|\frac{1}{\sqrt{3}}A\right|^2}{\left|\sqrt{\frac{2}{3}}A\right|^2}=\frac{1}{2}$$ □

פתרון סעיף ג'

פונקציית הגל של חלקיק חופשי היא:

$$\psi\left(t\right)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,p_\mu x^\mu}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(Et-\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}$$

במערכת המנוחה $\mathbf{p}=\mathbf{0}$ ו־$E=m$, לכן:

$$\psi\left(t\right)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,mt}$$

נוסיף מקדם דעיכה ונקבל:

$$\psi\left(t\right)=\mathrm{e}^{-t/\tau}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,mt}$$ □

פתרון סעיף ד'

בכל מאורע ניתן למדוד באמצעות גלאים את ה־4־תנעים של ה־π' וה־N' שהתקבלו, ולחשב בעזרתם את מסת המערכת כך:

$$m_{\pi'N'}=\left|\vec{p}_{\pi'}+\vec{p}_{N'}\right|$$ □

פתרון סעיף ה'

נסמן $\Gamma\equiv1/\tau$ ונבצע טרנספורם פורייה:

$$\begin{aligned}\Psi\left(E\right)&=\int_0^\infty\psi\left(t\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,Et}\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^\infty\mathrm{e}^{-t/\tau}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,mt}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,Et}\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^\infty\mathrm{e}^{-(\Gamma+\mathrm{i}(m-E))t}\,\mathrm{d}t\\&=\left.\frac{\mathrm{e}^{-(\Gamma+\mathrm{i}(m-E))t}}{-\left(\Gamma+\mathrm{i}\left(m-E\right)\right)}\right|_0^\infty\\&=\frac{1}{\Gamma+\mathrm{i}\left(m-E\right)}\end{aligned}$$

ריבוע האמפליטודה יהיה:

$$\left|\Psi\left(E\right)\right|^{2}=\left|\frac{1}{\Gamma+\mathrm{i}\left(m-E\right)}\right|^{2}=\frac{1}{\Gamma^{2}+\left(m-E\right)^{2}}$$

הפונקציה שקיבלנו מקבלת בבירור מקסימום גלובלי בנקודה $E=m$, ולכן נראה רזוננס סביב הנקודה הזאת, כפי שרצינו להוכיח. □

פתרון סעיף ו'

אם ניתן לקבל את כל הפרמטרים של הפונקציה באמצעות התאמה לנתונים הניסיוניים, אז בפרט ניתן לקבל גם את Γ, ואז זמן החיים יהיה בקירוב $\tau=1/\Gamma$. □

שאלה 5

פצצת אטום (כמו גם כורים גרעיניים) מבוססת על תהליך הביקוע של אורניום בו משתחררת אנרגיה בתהליך כגון $n+{}^{235}_{92}\mathrm{U}\to{}^{93}_{37}\mathrm{Rb}+{}^{140}_{55}\mathrm{Cs}+3n$. נחשב את אנרגיית הקשר של היסודות בתהליך הנ"ל, תוך שימוש במודל טיפת הנוזל:

$$B\left(A,Z\right)=a_{V}A-a_{S}A^{2/3}-a_{C}z^{2}A^{-1/3}-a_{A}\left(Z-A/2\right)^{2}A^{-1}-a_{P}A^{-1/2}$$

כאשר:

$$a_{V}\approx15.56,\qquad a_{S}\approx17.23,\qquad a_{C}\approx0.697,\qquad a_{A}\approx93.14$$
$$a_{P}=\begin{cases}-12 & A\text{ even and }Z\text{ even}\\ 0 & A\text{ odd}\\ +12 & A\text{ even and }Z\text{ odd}\end{cases}$$

והיחידות של כל המקדמים נתונות ב־MeV.

א. חשבו את אנרגיית הקשר של כל אחד מהיסודות ${}^{235}_{92}\mathrm{U},{}^{93}_{37}\mathrm{Rb},{}^{140}_{55}\mathrm{Cs}$ במסגרת מודל הטיפה. שימו לב אילו איברים יתרמו ואילו לא.

ב. חשבו את סך האנרגיה המשתחררת בהתפרקות אחת. הזניחו את האנרגיה הקינטית של הנייטרון במצב ההתחלתי, את מסת האלקטרונים באטום ואת אנרגיית הקשר של האלקטרונים.

ג. נתון כי מסת האורניום בפצצה היא $m\approx25\,\mathrm{kg}$ ומסת נוקליאון אחד היא $1\,\mathrm{amu}\approx1.66\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$. חשבו את האנרגיה המשתחררת (בקילוטון TNT, $1\,\mathrm{MeV}=3.83\times10^{-26}\,\mathrm{kT}$) בהנחה שכל אטומי האורניום מתפרקים.

ד. השוו לעוצמת פצצת האטום שהוטלה על הירושימה (כ־$15\,\mathrm{kT}$). הסבירו האם ההנחות שעשינו סבירות.

פתרון סעיף א'

נחשב ונקבל:

$$B\left({}^{235}_{92}\mathrm{U}\right)\approx1787\,\mathrm{MeV},\qquad B\left({}^{93}_{37}\mathrm{Rb}\right)\approx792\,\mathrm{MeV},\qquad B\left({}^{140}_{55}\mathrm{Cs}\right)\approx1157\,\mathrm{MeV}$$ □

פתרון סעיף ב'

האנרגיה המשתחררת היא ההפרש בין אנרגיית הקשר הכוללת לפני ואחרי:

$$\Delta E\approx792\,\mathrm{MeV}+1157\,\mathrm{MeV}-1787\,\mathrm{MeV}\approx162\,\mathrm{MeV}$$ □

פתרון סעיף ג'

נחשב ונקבל כ־$398\,\mathrm{kT}$. ☐

פתרון סעיף ד'

הפצצה שלנו הרבה יותר חזקה, פי 26 בערך. בהנחה כי גם הפצצה שהוטלה על הירושימה הכילה $25\,\mathrm{kg}$ אורניום, נראה שההנחות שעשינו אינן סבירות. למשל, אולי לא כל אטומי האורניום מתפרקים. ☐