מרחבי הילברט: פתרון מבחן מועד א׳ תשס"ט (24/2/2009)

גרסה 1.1, פברואר 2010

ברק שושני
baraksh@gmail.com | http://baraksh.co.il/

שאלה 3

הראו שהמערכת:

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\left(nx\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

היא בסיס אורתונורמלי של $L_2\left[0,\pi\right]$.

פתרון

נסמן:

$$e_n \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\left(nx\right)$$

אז מתקיים:

$$\begin{aligned}\left\langle e_n, e_m\right\rangle &= \int_0^\pi \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\left(nx\right)\overline{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\left(mx\right)}\mathrm{d}x\\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin\left(nx\right)\sin\left(mx\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(\cos\left(\left(n-m\right)x\right)-\cos\left(\left(n+m\right)x\right)\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

אם $n=m$ אז:

$$\left\langle e_n, e_n\right\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left(1-\cos\left(2nx\right)\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(x-\frac{\sin\left(2nx\right)}{2n}\right)\Bigg|_0^\pi = 1$$

ואם $n\neq m$ אז:

$$\left\langle e_n, e_m\right\rangle = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin\left(\left(n-m\right)x\right)}{n-m}-\frac{\sin\left(\left(n+m\right)x\right)}{n+m}\right)\Bigg|_0^\pi = 0$$

לפיכך:

$$\left\langle e_n, e_m\right\rangle = \delta_{nm}$$

ו־$\{e_n\}$ היא מערכת אורתונורמלית ב־$L_2[0,\pi]$. כעת, תהי f פונקציה המקיימת $f\perp\{e_n\}$. אז לכל n מתקיים:

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x=0$$

נגדיר:

$$g(x)\overset{\text{def}}{=}\begin{cases}-f(x) & x\in[-\pi,0)\\ +f(x) & x\in[0,\pi]\end{cases}$$

אז g היא פונקציה אי־זוגית, לכן:

$$\langle g(x),1\rangle=\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,\mathrm{d}x=0,\qquad \langle g(x),\cos(nx)\rangle=\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x=0$$

בנוסף:

$$\langle g(x),\sin(nx)\rangle=\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x=0$$

לכן, מאחר שהמערכת $\{1,\sin(nx),\cos(nx)\}_{n=1}^{\infty}$ שלמה ב־$L_2[-\pi,\pi]$, חייב להתקיים $g=0$. מכאן גם $f=0$, ולכן $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(nx)\right\}_{n=1}^{\infty}$ היא מערכת שלמה ב־$L_2[0,\pi]$. כעת, מערכת אורתונורמלית שלמה במרחב הילברט היא בסיס, כפי שרצינו להוכיח. $\square$

שאלה 4

הראו שהמרחב:

$$E\overset{\text{def}}{=}\left\{\mathbf{x}\in\ell_2:\sum_{n=1}^{\infty}x_n=0\right\}$$

אינו תת־מרחב סגור של ℓ_2.

פתרון

נגדיר פונקציונל f כך:

$$f(\mathbf{x})\overset{\text{def}}{=}\sum_{n=1}^{\infty}x_n$$

כאשר הפונקציונל מוגדר על תת־המרחב L של וקטורים ב־ℓ_2 שעבורם הטור מתכנס. מאחר ש־L כולל את כל הסדרות שמתאפסות החל ממקום מסוים, הוא צפוף ב־ℓ_2. נשים לב כי $E=\operatorname{Ker}f\subseteq L$. ניקח $\mathbf{x}_0\in L$ כלשהו כך ש־$f(\mathbf{x}_0)=1$, ונגדיר לכל $\mathbf{x}\in L$:

$$\mathbf{y}\overset{\text{def}}{=}\mathbf{x}-f(\mathbf{x})\mathbf{x}_0\quad\Longrightarrow\quad f(\mathbf{y})=f(\mathbf{x}-f(\mathbf{x})\mathbf{x}_0)=f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x})\cdot1=0$$

מכאן, $\mathbf{y}\in E$. נניח כי:

$$\mathbf{x}=\mathbf{y}_1+\lambda\mathbf{x}_0$$

עבור $\mathbf{y}_1\in E$ ו־$\lambda\in\mathbb{C}$ כלשהם, אז מתקיים:

$$\begin{aligned}&\mathbf{x}=\mathbf{y}+f(\mathbf{x})\mathbf{x}_0=\mathbf{y}_1+\lambda\mathbf{x}_0\\ \Rightarrow&\mathbf{y}-\mathbf{y}_1=(\lambda-f(\mathbf{x}))\mathbf{x}_0\\ \Rightarrow&0=f(\mathbf{y}-\mathbf{y}_1)=(\lambda-f(\mathbf{x}))f(\mathbf{x}_0)=\lambda-f(\mathbf{x})\end{aligned}$$

מכאן $\lambda = f(\mathbf{x})$, ולכן גם $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1$. אנו רואים כי לכל $\mathbf{x} \in L$ ניתן לרשום:

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + f(\mathbf{x})\,\mathbf{x}_0$$

ופירוק זה הוא יחיד. לפיכך:

$$L = E + \mathrm{Span}\{\mathbf{x}_0\}$$

כעת, נניח בשלילה כי E הוא תת־מרחב סגור. אז גם L, כסכום של תת־מרחב סגור ומרחב ממימד סופי, הוא סגור - ומכיוון שהוא צפוף ב־ℓ_2, מתקיים $L = \ell_2$. f מוגדר על כל ℓ_2 והוא בעל גרעין סגור, לכן הוא רציף. אז ממשפט ההצגה של ריס, קיימת סדרה $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots) \in \ell_2$ כך ש:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$$

נפעיל את f על וקטורי הבסיס הסטנדרטי $\hat{\mathbf{e}}_n$, נשווה עם ההגדרה של f לעיל ונקבל:

$$a_n = 1$$

אבל אז:

$$\|\mathbf{a}\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$$

לכן $\mathbf{a} \notin \ell_2$, בסתירה. מכאן, תת־המרחב E אינו סגור. $\square$

שאלה 5

נגדיר אופרטור $t \in L(L_2[0,1])$ לפי:

$$(Tf)(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \int_0^1 k(x,y)\, f(y)\,\mathrm{d}y$$

כאשר:

$$k(x,y) \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} y(1-x) & 0 \le y \le x \\ x(1-y) & x \le y \le 1 \end{cases}$$

מצאו את הספקטרום, הערכים העצמיים והפונקציות העצמיות של T.

פתרון

האופרטור קומפקטי (ההוכחה זהה להוכחה בשאלה 4 במבחן מועד א' תשס"ח), לכן הספקטרום שלו מורכב מ־0 ומערכים עצמיים בלבד. בנוסף, עבור $(x,y) \in [0,1]^2$ מתקיים $k(x,y) = \overline{k(y,x)}$ ולכן:

$$\begin{aligned}
\langle Tf, g\rangle &= \int_0^1 (Tf)(x)\,\overline{g(x)}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 k(x,y)\,f(y)\,\mathrm{d}y\right)\overline{g(x)}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1\int_0^1 k(x,y)\,f(y)\,\overline{g(x)}\mathrm{d}(x,y) \\
&= \int_0^1\int_0^1 f(y)\,\overline{k(x,y)\,g(x)}\mathrm{d}(x,y) \\
&= \int_0^1 f(y)\,\overline{\left(\int_0^1 k(y,x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\right)}\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 f(y)\,\overline{(Tg)(y)}\mathrm{d}y \\
&= \langle f, Tg\rangle
\end{aligned}$$

ומכאן, האופרטור צמוד לעצמו. לפיכך כל הערכים העצמיים שלו הם ממשיים. כעת, יהי $\lambda \in \mathbb{R}$, ונחפש פונקציה המקיימת:

$$\begin{aligned}(Tf)(x) &= \int_0^1 k(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^x y(1-x) f(y)\,\mathrm{d}y + \int_x^1 x(1-y) f(y)\,\mathrm{d}y \\ &= (1-x)\int_0^x y f(y)\,\mathrm{d}y + x\int_x^1 (1-y) f(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^x y f(y)\,\mathrm{d}y + x\int_x^1 f(y)\,\mathrm{d}y - x\int_0^1 y f(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \lambda f(x)\end{aligned}$$

נגזור את שני אגפי המשוואה לפי x:

$$\begin{aligned}\lambda f'(x) &= x f(x) + \int_x^1 f(y)\,\mathrm{d}y - x f(x) - \int_0^1 y f(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_x^1 f(y)\,\mathrm{d}y - \int_0^1 y f(y)\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

נגזור פעם נוספת:

$$\lambda f''(x) = -f(x)$$

מכאן:

$$f(x) = A\sin\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}x\right) + B\cos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}x\right)$$

בנוסף, תנאי ההתחלה הם:

$$\begin{aligned}\lambda f(0) &= \int_0^0 y f(y)\,\mathrm{d}y + 0\cdot\int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y - 0\cdot\int_0^1 y f(y)\,\mathrm{d}y = 0 \\ \lambda f(1) &= \int_0^1 y f(y)\,\mathrm{d}y + 1\cdot\int_1^1 f(y)\,\mathrm{d}y - 1\cdot\int_0^1 y f(y)\,\mathrm{d}y = 0\end{aligned}$$

נציב אותם בפתרון:

$$f(0) = B = 0$$

$$f(1) = A\sin\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \pi n, \qquad n = 1,2,\ldots$$

מכאן, הערכים העצמיים הם:

$$\lambda_n = \frac{1}{\pi^2 n^2}, \qquad n = 1,2,\ldots$$

והפונקציות העצמיות הן (עד כדי קבוע):

$$f_n(x) = \sin(\pi n x)$$

□

שאלה 6

לכל $f \in L_2[0,4\pi]$ נגדיר:

$$(Tf)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sin x \cdot f(x)$$

האם T חסום? האם הוא קומפקטי? מצאו את $\|T\|$, את הספקטרום של T ואת כל הערכים העצמיים שלו.

פתרון

חסימות

מתקיים:

$$\|Tf\|^2=\int_0^{4\pi}|\sin x\cdot f(x)|^2\,\mathrm{d}x=\int_0^{4\pi}\sin^2 x\,|f(x)|^2\,\mathrm{d}x\le\int_0^{4\pi}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x=\|f\|^2$$

לפיכך האופרטור חסום.

קומפקטיות

נגדיר:

$$c_n\stackrel{\text{def}}{=}\int_{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{n}}\sin^2 t\,\mathrm{d}t$$

נשים לב כי עבור $n\ge 2$:

$$\left[\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{n+1},\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{n}\right]\subseteq\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$$

בקטע זה $\sin t\ge\frac{1}{\sqrt{2}}$, ולכן:

$$c_n\ge\int_{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{n}}\frac{1}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n}-\frac{\pi}{n+1}\right)=\frac{\pi}{2n(n+1)}$$

כעת נגדיר סדרה $\{f_n\}\subseteq L_2[0,4\pi]$ כך:

$$f_n(x)\stackrel{\text{def}}{=}\begin{cases}1/\sqrt{c_n} & x\in\left[\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{n+1},\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{n}\right]\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

אז מתקיים:

$$\|f_n\|^2=\int_{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{n}}\frac{1}{c_n}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{c_n}\frac{\pi}{n(n+1)}\le 2$$

לפיכך הסדרה חסומה. אבל לכל $n,m\ge 2$ מתקיים:

$$\begin{aligned}\|Tf_n-Tf_m\|^2&=\int_0^{4\pi}|(Tf_n)(x)-(Tf_m)(x)|^2\,\mathrm{d}x\\&=\int_{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{n}}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{c_n}}\right)^2\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{m+1}}^{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{m}}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{c_m}}\right)^2\mathrm{d}x\\&=\frac{\int_{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{n}}\sin^2 x\,\mathrm{d}x}{\int_{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{n}}\sin^2 t\,\mathrm{d}t}+\frac{\int_{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{m+1}}^{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{m}}\sin^2 x\,\mathrm{d}x}{\int_{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{m+1}}^{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{m}}\sin^2 t\,\mathrm{d}t}\\&=2\end{aligned}$$

לכן לא יכולה להיות ל־$\{Tf_n\}$ תת־סדרה שהיא סדרת קושי, ומכאן T אינו קומפקטי.

נורמה

מצד אחד, מתקיים:

$$\|Tf\|^2=\int_0^{4\pi}\sin^2 x\,|f(x)|^2\,\mathrm{d}x\le\int_0^{4\pi}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x=\|f\|^2$$

לפיכך $\|T\| \leq 1$. מצד שני, לכל $\varepsilon > 0$ נגדיר פונקציה:

$$f_\varepsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+\varepsilon\right] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

אז מתקיים:

$$\|f_\varepsilon\|^2 = \int_{\pi/2}^{\pi/2+\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \mathrm{d}x = 1$$

וכמו כן:

$$\|Tf_\varepsilon\|^2 = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\pi/2}^{\pi/2+\varepsilon} \sin^2 x \,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\pi/2}^{\pi/2+\varepsilon} \sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right) \mathrm{d}x = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)$$

בגבול $\varepsilon \to 0$ נקבל $\|T\| \geq \sin\frac{\pi}{2} = 1$, לפיכך $\|T\| = 1$.

<u>ספקטרום</u>

מכיוון ש־$\|T\| = 1$, אנו יודעים כי כל נקודה המקיימת $|\lambda| > 1$ היא נקודה רגולרית. בנוסף נשים לב כי:

$$\langle Tf, g\rangle = \int_0^{4\pi} \sin x \cdot f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{4\pi} f(x)\overline{\sin x \cdot g(x)}\,\mathrm{d}x = \langle f, Tg\rangle$$

לכן T צמוד לעצמו, והספקטרום שלו מכיל מספרים ממשיים בלבד. תהי $\lambda \in [-1,1]$, אז האופרטור ההפוך של $T-\lambda$ הוא:

$$\left((T-\lambda)^{-1} f\right)(x) = \frac{f(x)}{\sin x - \lambda}$$

אך אופרטור זה אינו חסום, לפיכך הספקטרום של T הוא כל הקטע $[-1,1]$. תהי f פונקציה המקיימת:

$$(Tf)(x) = \sin x \cdot f(x) = \lambda f(x)$$

אם $f \not\equiv 0$, כלומר קיימת קבוצה A בעלת מידה חיובית כך ש־$f(x) \neq 0$ לכל $x \in A$, אז בהכרח $\sin x = \lambda$ לכל $x \in A$, מה שכמובן לא יכול להתקיים. לפיכך אין ל־T ערכים עצמיים. לבסוף, תהי $f \in L_2[0,4\pi]$ פונקציה כלשהי. נגדיר סדרת פונקציות $\{f_n\}$ כך ש־$f_n(x) = f(x)/(\sin x - \lambda)$ בכל הקטע $[0,4\pi]$, אך $f_n(x) = 0$ בקטע באורך $1/n$ סביב כל נקודה בה $\sin x = \lambda$. אז מתקיים:

$$(T-\lambda) f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$$

לפיכך $f \in \overline{\operatorname{Im}(T-\lambda)}$. מכאן $\overline{\operatorname{Im}(T-\lambda)} = L_2[0,4\pi]$, ולכן $\lambda \in \sigma_c(T)$, כלומר $[-1,1]$ הוא הספקטרום הרציף. $\square$