

# תורת היחסות הכללית: פתרון מבחן מועד א' תשס"ט

גרסה 1.0, יולי 2011

ברק שושני  
baraksh@gmail.com | <http://baraksh.co.il/>

## שאלה 1

א. הראו שכל חלקיק אשר נמצא מעבר לאופק של חור שחור ( $r < 2M$ ) חייב להקטין את  $r$  לאורך מסלולו בקצב:

$$\left| \frac{dr}{d\tau} \right| \geq \sqrt{\frac{2M}{r} - 1}$$

ב. הראו שהזמן שלוקח לחלקיק להגיע לסינגולריות חסום מלמעלה ע"י  $\pi M$ .

ג. הראו שזמן זה מתקבל עבור חלקיק בנפילה חופשית מהאופק  $r = 2M$  בגבול  $E \rightarrow 0$ .

## פתרון סעיף א'

כזכור, מטריקת שוורצשילד היא:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

כאשר:

$$d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$$

לפיכך הזמן העצמי הוא:

$$d\tau^2 \equiv -ds^2 = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

מכאן נקבל:

$$1 = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t}^2 - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2)$$

כאשר נקודה מסמלת גזירה לפי  $\tau$ . לפיכך:

$$\dot{r}^2 = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^2 \dot{t}^2 - r^2 \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)$$

נשים לב שאם  $r < 2M$  אז  $\frac{2M}{r} > 1$  ולכן  $1 - \frac{2M}{r} < 0$ . נסמן  $S^2 \equiv \frac{2M}{r} - 1 > 0$ , אז:

$$\dot{r}^2 = S^4 \dot{t}^2 + S^2 r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) + S^2$$

לכן  $\dot{r}^2 \geq S^2$ , ומכאן:

$$|\dot{r}| = \left| \frac{dr}{d\tau} \right| \geq \sqrt{\frac{2M}{r} - 1} = S$$

□

כפי שרצינו להראות.

### פתרון סעיף ב'

החלקיק נע לעבר הסינגולריות ב- $r = 0$  במהירות שהיא לכל הפחות  $|\dot{r}| = \sqrt{\frac{2M}{r} - 1}$  בכל נקודה לאורך המסלול. זמן החיים המקסימלי יתקבל אם החלקיק יתחיל מ- $r = 2M$  וינוע תמיד במהירות המינימלית האפשרית:

$$\begin{aligned} T &= \int_0^{2M} \frac{d\tau}{dr} dr \\ &= \int_0^{2M} \frac{1}{\sqrt{\frac{2M}{r} - 1}} dr \\ &\quad \left[ u \equiv \frac{r}{2M} \right] \\ &= 2M \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\frac{u}{1-u}}} du \\ &\quad \left[ u \equiv \sin^2 \alpha \right] \\ &= 2M \int_0^{\pi/2} 2 \sin^2 \alpha d\alpha \\ &= 2M \left( \alpha - \frac{1}{2} \sin(2\alpha) \right) \Big|_0^{\pi/2} \\ &= \pi M \end{aligned}$$

□

### פתרון סעיף ג'

אם  $E \rightarrow 0$ , החלקיק מתחיל ב- $r = 2M$  ללא אנרגיה קינטית (או לכל היותר, עם אנרגיה שמאפשרת לו לעבור את  $r = 2M$  ולהתחיל לצבור מהירות בכיוון הרדיאלי). מסימטריה, הוא לא יצבור מהירות בכיוון  $\theta$  או  $\phi$ , ולכן  $\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$ . בנוסף:

$$\dot{t} \equiv \frac{dt}{d\tau} \equiv U^0 = \frac{p^0}{m} = \frac{E}{m} \rightarrow 0$$

ולכן, מהביטוי שמצאנו בסעיף א':

$$\begin{aligned} \dot{r}^2 &= S^4 \dot{t}^2 + S^2 r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) + S^2 \\ &= S^2 \end{aligned}$$

□

כלומר, המינימום של  $\dot{r}$  מתקבל בדיוק בתנאים אלו.

## שאלה 2

המטריקה של מרחב FRW היא:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

הניחו שהיקום נשלט ע"י חומר שמקיים  $p = w\rho$  כאשר  $w$  קבוע.

- א. מצאו את תלות  $\rho$  ב- $a(t)$ .  
 ב. מצאו עבור אילו ערכים של  $w$  היקום מאיץ.

### פתרון סעיף א'

נשתמש במשוואה:

$$\dot{\rho} = -3(\rho + p) \frac{\dot{a}}{a}$$

נציב  $p = w\rho$ :

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w) \frac{\dot{a}}{a}$$

נבצע אינטגרציה ונקבל:

$$\rho = Ca^{-3(1+w)}$$

□

כאשר  $C$  קבוע.

### פתרון סעיף ב'

ביקום מאיץ מתקיים  $\ddot{a} > 0$ . ממשוואות פרידמן:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3p)$$

לכן:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3} \cdot a \cdot (1 + 3w) \cdot Ca^{-3(1+w)} = -\frac{4\pi C}{3} (1 + 3w) a^{-2-3w}$$

□

מכיוון ש- $a > 0$ , הביטוי יהיה חיובי כאשר  $1 + 3w < 0$ , כלומר כאשר  $w < -1/3$ .

## שאלה 3

- א. מצאו את הטרנספורמציה הקונפורמית שמקשרת בין מרחב אוקלידי (בארבעה ממדים) ל- $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ .  
 ב. האם הטרנספורמציה שמצאתם מעבירה כל קו גאודזי לקו גאודזי? אם כן הוכיחו, אם לא הראו דוגמה נגדית.

### פתרון סעיף א'

טרנספורמציה קונפורמית היא טרנספורמציה אשר מכפילה את המטריקה כולה בפונקציה חיובית  $\omega^2$  אשר תלויה במרחב ובזמן:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \omega^2(x^\mu) g_{\mu\nu} \iff \tilde{d}s^2 = \omega^2(x^\mu) ds^2$$

המטריקה על הספירה התלת-ממדית  $\mathbb{S}^3$  היא:

$$d\Omega_3^2 = d\psi^2 + \sin^2 \psi d\Omega_2^2 = d\psi^2 + \sin^2 \psi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

המטריקה על המרחב האוקלידי הארבע-ממדי  $\mathbb{E}^4$  היא:

$$ds_{\mathbb{E}^4}^2 = dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\Omega_3^2$$

המטריקה על המרחב  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$  היא:

$$ds_{\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3}^2 = dr^2 + d\Omega_3^2$$

נבצע החלפת משתנים  $r \equiv e^R$ , אז  $dr = e^R dR$  ונקבל:

$$ds_{\mathbb{E}^4}^2 = dr^2 + r^2 d\Omega_3^2 = e^{2R} (dR^2 + d\Omega_3^2) = e^{2R} ds_{\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3}^2$$

□

הטרנספורמציה הקונפורמית המבוקשת היא, אם כן,  $r \equiv e^R$ .

## פתרון סעיף ב'

קו גאודזי  $x^\mu$  מקיים את המשוואה:

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$$

כאשר נקודה מסמלת גזירה לפי הפרמטר  $\lambda$  שמגדיר את העקומה. במרחב  $\mathbb{E}^4$ , המשוואה היא פשוט  $\ddot{x}^\mu = 0$ , והקווים הגאודזיים הם כל הקווים הישרים  $x^\mu = \lambda A^\mu + B^\mu$  כאשר  $A^\mu, B^\mu$  הם וקטורים כלשהם. במרחב  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ , מתקיים:

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = 1, \quad g_{22} = \sin^2 \psi, \quad g_{33} = \sin^2 \theta$$

נזכור את הנוסחה למקדמי כריסטופל:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})$$

עבור  $\lambda = 0$ , רק  $\sigma = 0$  ישרוד בסכום, ולכן הביטויים  $\partial_\nu g_{\sigma\mu}$  ו- $\partial_\mu g_{\nu\sigma}$  יבטאו גזירה של הקבוע 1 לפי קואורדינטה כלשהי, ויתאפסו. הביטוי  $\partial_\sigma g_{\mu\nu}$  יבטא גזירה לפי  $r$ , וגם הוא יתאפס מכיוון שאף קואורדינטה אינה תלויה ב- $r$ . מכאן:

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = 0, \quad \forall \mu, \nu$$

לכן המשוואה עבור רכיב  $\mu = 0$  של הקו הגאודזי היא גם במקרה זה:

$$\ddot{x}^0 = 0$$

כעת,  $x^\mu(\lambda) = (\lambda, 0, 0, 0)$  הוא קו גאודזי ב- $\mathbb{E}^4$ . לאחר הטרינספורמציה נקבל את הקו  $\tilde{x}^\mu(\lambda) = (e^\lambda, 0, 0, 0)$  אשר בבירור אינו מקיים את משוואת הקווים הגאודזיים ב- $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ . לפיכך מצאנו דוגמה נגדית.  $\square$