חישוב אינטגרלים ממשיים באמצעות אינטגרציה במישור המרוכב: אוסף פתרונות לדוגמה

גרסה 1.0, פברואר 2010

ברק שושני
baraksh@gmail.com | http://baraksh.co.il/

תוכן עניינים

חלק I

מבוא

הקדמה

אינטגרציה מסלולית במישור המרוכב היא טכניקה חשובה ושימושית מאוד לחישוב אינטגרלים ממשיים מסוימים. בחוברת זו אספתי דוגמאות לשימוש בטכניקה זו, ברמות קושי שונות. השתדלתי שהפתרונות יהיו מפורטים ככל האפשר, ואף הוספתי איורים במידת הצורך.

החוברת מתאימה לסטודנטים בכל תחומי המדעים המדויקים וההנדסה. אני מקווה שתמצאו אותה שימושית. אם מצאתם טעויות, אנא דווחו לי עליהן בכתובת הרשומה לעיל.

הגדרות ומשפטים

להלן מספר הגדרות ומשפטים חשובים על נקודות סינגולריות ושאריות, אשר ישמשו בחוברת זו.

- הנקודה z_0 היא **סינגולריות מבודדת** של $f\left(z\right)$ אם $f\left(z\right)$ אנליטית בסביבה נקובה $\{0<|z-z_0|<r\}$ עבור $r>0$ כלשהו. בהינתן פיתוח לטור לורן:

$$f\left(z\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\left(z-z_0\right)^n$$

  - הנקודה z_0 היא **סינגולריות סליקה** של $f\left(z\right)$ אם $a_n=0$ לכל $n<0$.
    אם z_0 סינגולריות מבודדת של $f\left(z\right)$ ו־$f\left(z\right)$ חסומה בסביבה של z_0, אז z_0 היא סינגולריות סליקה.
  - הנקודה z_0 נקראת **קוטב** מסדר k אם $a_{-k}\neq 0$ אבל $a_{-n}=0$ לכל $n>k$. קוטב מסדר 1 נקרא **קוטב פשוט**.
    אם z_0 סינגולריות מבודדת של $f\left(z\right)$ אז z_0 הוא קוטב מסדר k אם ורק אם:
    א. $f\left(z\right)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^k}$ כאשר $g\left(z\right)$ אנליטית ב־z_0 ו־$g\left(z_0\right)\neq 0$.
    ב. $\frac{1}{f(z)}$ אנליטית ב־z_0 ובעלת אפס מסדר k.
    ג. $\lim_{z\to z_0}|f\left(z\right)|=\infty$.

- הנקודה z_0 נקראת **סינגולריות עיקרית** אם $a_n \neq 0$ עבור אינסוף $n < 0$. כלומר, היא סינגולריות מבודדת אך אינה סליקה או קוטב משום סדר.

- ל־$f(z)$ יש סינגולריות מבודדת ב־$z = \infty$ אם $f(z)$ אנליטית בסביבה $\{|z| > R\}$ עבור $R > 0$ כלשהו. תנאי זה שקול לכך של־$f\left(\frac{1}{z}\right)$ יש סינגולריות מבודדת ב־$z = 0$. הסיווג של הסינגולריות של $f(z)$ ב־∞ זהה לסיוג של הסינגולריות המתאימה של $f\left(\frac{1}{z}\right)$ ב־0. לחלופין, אפשר לפתח לטור לורן בטבעת $\{|z| > R\}$ עבור $R > 0$ כלשהו (כך שהטבעת מכילה את ∞), והסיווג עובד באותה צורה כפי שהגדרנו למעלה, אך עם סימנים הפוכים לאינדקסים.

- **השארית** של $f(z)$ בנקודה z_0 כלשהי היא המקדם של $(z - z_0)^{-1}$ בפיתוח לורן סביב הנקודה z_0. למציאת השארית נשתמש באחת מהדרכים הבאות:

  - אם הסינגולריות סליקה (או שהפונקציה אנליטית ב־z_0) השארית תהיה 0, כי האיבר $(z - z_0)^{-1}$ כלל אינו קיים בפיתוח.
  - אם הקוטב הוא פשוט אז:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0) f(z)\right]$$

מכיוון ש:

$$\lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0) f(z)\right] = \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0) \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n\right] = \lim_{z \to z_0} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_{n-1} (z - z_0)^n\right] = a_{-1}$$

  - אם הקוטב הוא פשוט, וניתן לרשום $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ כאשר g, h אנליטיות בסביבה נקובה של z_0 ומתקיים $h(z_0) = 0$ אבל $h'(z_0) \neq 0$, אז:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

כי:

$$\lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0) f(z)\right] = \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)}\right] = \lim_{z \to z_0} \frac{g(z)}{\frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0}} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

  - אם הקוטב הוא מסדר k אז:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \left\{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{k-1} \left[(z - z_0)^k f(z)\right]\right\}$$

כפי שאפשר לראות מהצבת פיתוח לורן של $f(z)$. במקרה הנפוץ בו $k = 2$, נקבל ביטוי פשוט יחסית:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left[(z - z_0)^2 f(z)\right]\right\}$$

  - אם לא ניתן להשתמש באף אחת מהדרכים הנ"ל, אין ברירה אלא לפתח לטור לורן. אך גם במקרה כזה, לא חייבים למצוא את כל איברי הטור - מספיק למצוא את המקדם מסדר -1 בפיתוח.

- למציאת השארית בנקודה ∞ נבצע החלפת משתנים $w = \frac{1}{z}$. אז $w = 0 \implies z = \infty$ ולהפך, וכמו כן $\mathrm{d}w = -\frac{1}{z^2}\,\mathrm{d}z$. כך נקבל:

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) &= \operatorname*{Res}_{w=0} f(w) \\ &= \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint_\gamma f(w)\,\mathrm{d}w \\ &= -\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) \mathrm{d}z \\ &= -\operatorname*{Res}_{z=0} \left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)\right]\end{aligned}$$

כאשר γ היא מסילה כלשהי שמכילה את 0.

- **משפט השארית** הוא המשפט העיקרי בו נשתמש בחוברת זו. יהי D תחום פשוט־קשר ותהי $\gamma = \partial D$ מסילה סגורה המהווה את שפת התחום. נניח כי $f(z)$ היא פונקציה אנליטית ב־D פרט למספר סופי של נקודות $D \supseteq \{z_1, \dots, z_n\}$, כך שהנקודות לא נמצאות על המסילה γ. אז מתקיים:

$$\oint_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\,\mathrm{i} \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_i} f(z)$$

כמקרה פרטי, אם $f(z)$ אנליטית בכל D נקבל את **משפט האינטגרל של קושי**:

$$\oint_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

כמו כן ראוי לציין בהקשר זה את **נוסחת האינטגרל של קושי**, אשר משמשת להוכחת משפט השארית:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z$$

חלק II

האינטגרלים

המסילה: חצי המעגל העליון

אינטגרל מס' 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} \mathrm{d}x$$

אינטגרל מס' 2:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} \mathrm{d}x, \qquad a > 0$$

אינטגרל מס' 3:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x \sin(\alpha x)}{x^2 + \beta^2} \mathrm{d}x, \qquad \alpha, \beta > 0$$

אינטגרל מס' 4:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2 + 1} \mathrm{d}x$$

המסילה: מעגל היחידה

אינטגרל מס' 1:

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{a + b \sin t} \mathrm{d}t, \qquad a > b > 0$$

אינטגרל מס' 2:

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{1 + \sin^2 t} \mathrm{d}t$$

אינטגרל מס' 3:

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 t}{a+\cos t}\mathrm{d}t, \qquad a>1$$

אינטגרל מס' 4: (הפרידו למקרים עבור a)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a+\sin^2 x}\mathrm{d}x, \qquad a\in\mathbb{R}$$

המסילה: "חור המנעול"

אינטגרל מס' 1:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{-a}}{x+1}\mathrm{d}x, \qquad 0<a<1$$

אינטגרל מס' 2:

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^a\left(x+1\right)}\mathrm{d}x, \qquad 0<a<1$$

אינטגרל מס' 3:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{x^n+1}\mathrm{d}x, \qquad -1<\alpha<n-1, \qquad n\in\mathbb{N}$$

אינטגרל מס' 4:

$$\int_0^{\infty} \frac{\log\left(1+x^2\right)}{x^{1+\alpha}}\mathrm{d}x, \qquad 0<\alpha<2$$

אינטגרל מס' 5:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\left(x+1\right)\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

המסילה: חצי המעגל העליון ללא הראשית

אינטגרל מס' 1: (הפרידו למקרים עבור α,β)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin\left(\alpha x\right)}{x\left(x^2+\beta^2\right)}\mathrm{d}x, \qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

אינטגרל מס' 2:

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

אינטגרל מס' 3:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3}\mathrm{d}x$$

מסילות נוספות

אינטגרל מס' 1: ("משולש פיצה")

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x, \qquad n>1$$

אינטגרל מס' 2: ("עצם")

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x\left(1-x\right)}}\mathrm{d}x$$

אינטגרל מס' 3: (מלבן)

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x\omega}}{\cosh\left(\pi x\right)}\mathrm{d}x, \qquad \omega\in\mathbb{R}$$

אינטגרל מס' 4: (מלבן עם "שקעים")

$$\int_0^\infty \frac{\sin\left(ax\right)}{\sinh x}\mathrm{d}x, \qquad a\in\mathbb{R}$$

חלק III

הפתרונות

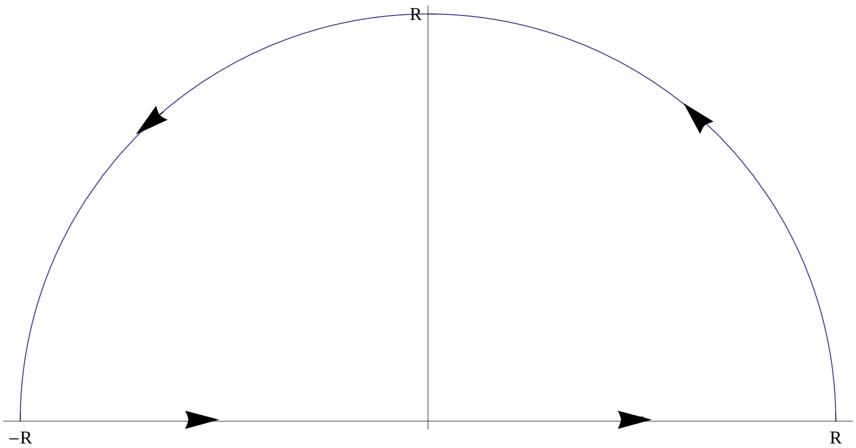
המסילה: חצי המעגל העליון

אינטגרל מס' 1

האינטגרל הוא:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} \mathrm{d}x$$

נשתמש במסילה γ_R המוגדרת כך:



אז מתקיים:

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{\gamma_R} \frac{1}{z^4+1} \mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} \mathrm{d}x + \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{1}{z^4+1} \mathrm{d}z$$

כאשר C_R היא הקשת העליונה (בעלת רדיוס R). נראה כי האינטגרל על הקשת מתאפס כאשר $R \to \infty$. ידוע כי:

$$\left| \int_{C_R} \frac{1}{z^4+1} \mathrm{d}z \right| \leq ML$$

כאשר $L = \pi R$ הוא אורך הקשת ו־M הוא הערך המוחלט המקסימלי של הפונקציה על הקשת. נסטה לרגע מחישוב האינטגרל על מנת להוכיח את **אי־שוויון המשולש ההפוך** עבור מספרים מרוכבים. יהיו $z, w \in \mathbb{C}$ ונרשום:

$$z = z - w + w$$

אז לפי אי־שוויון המשולש:

$$|z| = |(z-w)+w| \leq |z-w| + |w|$$

ומכאן:

$$|z| - |w| \leq |z-w|$$

מסימטריה גם $|w|-|z|\le|z-w|$ וכך נקבל:

$$||z|-|w||\le|z+w|$$

כעת נשתמש באי־השוויון שהוכחנו לחישוב המקסימום של הפונקציה על הקשת. אם $|z|=R$ אז:

$$\left|z^4+1\right|\ge\left|\left|z^4\right|-1\right|=\left|R^4-1\right|$$

מאחר ש־$R\to\infty$ אפשר לוותר על הערך המוחלט ולקבל:

$$\left|\frac{1}{z^4+1}\right|\le\frac{1}{R^4-1}\equiv M$$

ומכאן:

$$\left|\int_{C_R}\frac{1}{z^4+1}\mathrm{d}z\right|\le\frac{1}{R^4-1}\cdot\pi R\xrightarrow[R\to\infty]{}0$$

לכן האינטגרל על הקשת מתאפס ונוכל לרשום:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^4+1}\mathrm{d}x=\lim_{R\to\infty}\oint_{\gamma_R}\frac{1}{z^4+1}\mathrm{d}z$$

כעת נותר לחשב את האינטגרל על γ_R. נשים לב כי:

$$z^4=-1\Longrightarrow r^4\,\mathrm{e}^{4\,\mathrm{i}\,\theta}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+2\pi k)}\Longrightarrow r=1,\qquad\theta=\frac{\pi\,(1+2k)}{4},\ k\in\{0,1,2,3\}$$

לכן לפונקציה 4 קטבים פשוטים בנקודות $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi(1+2k)}{4}}$:

$$\begin{aligned}
z_1&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,(+1+\mathrm{i})\\
z_2&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{3\pi}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,(-1+\mathrm{i})\\
z_3&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{5\pi}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,(-1-\mathrm{i})\\
z_4&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{7\pi}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,(+1-\mathrm{i})
\end{aligned}$$

מתוכם, הקטבים שנמצאים בתוך המסילה (כלומר, בחצי המישור העליון) הם z_1,z_2. נחשב את השאריות בהם:

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=z_1}\frac{1}{z^4+1}&=\left.\frac{1}{(z-z_2)\,(z-z_3)\,(z-z_4)}\right|_{z=z_1}\\
&=\frac{1}{\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\,(1+\mathrm{i})-\frac{1}{\sqrt{2}}\,(-1+\mathrm{i})\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\,(1+\mathrm{i})-\frac{1}{\sqrt{2}}\,(-1-\mathrm{i})\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\,(1+\mathrm{i})-\frac{1}{\sqrt{2}}\,(1-\mathrm{i})\right]}\\
&=\frac{2^{3/2}}{[(1+\mathrm{i})-(-1+\mathrm{i})]\,[(1+\mathrm{i})-(-1-\mathrm{i})]\,[(1+\mathrm{i})-(1-\mathrm{i})]}\\
&=\frac{2^{3/2}}{[1+\mathrm{i}+1-\mathrm{i}]\,[1+\mathrm{i}+1+\mathrm{i}]\,[1+\mathrm{i}-1+\mathrm{i}]}\\
&=\frac{2^{3/2}}{2\cdot2\,(1+\mathrm{i})\cdot2\,\mathrm{i}}\\
&=\frac{1}{2^{3/2}}\frac{1}{\mathrm{i}-1}\\
&=-\frac{1+\mathrm{i}}{2^{5/2}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=z_2}\frac{1}{z^4+1} &= \left.\frac{1}{(z-z_1)(z-z_3)(z-z_4)}\right|_{z=z_2}\\
&= \frac{1}{\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+\mathrm{i})-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{i})\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+\mathrm{i})-\frac{1}{\sqrt{2}}(-1-\mathrm{i})\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+\mathrm{i})-\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\mathrm{i})\right]}\\
&= \frac{2^{3/2}}{[(-1+\mathrm{i})-(1+\mathrm{i})][(-1+\mathrm{i})-(-1-\mathrm{i})][(-1+\mathrm{i})-(1-\mathrm{i})]}\\
&= \frac{2^{3/2}}{[-1+\mathrm{i}-1-\mathrm{i}][-1+\mathrm{i}+1+\mathrm{i}][-1+\mathrm{i}-1+\mathrm{i}]}\\
&= \frac{2^{3/2}}{-2\cdot 2\,\mathrm{i}\cdot 2(-1+\mathrm{i})}\\
&= \frac{1}{2^{3/2}}\frac{1}{1+\mathrm{i}}\\
&= \frac{1-\mathrm{i}}{2^{5/2}}
\end{aligned}
$$

לכן:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^4+1}\mathrm{d}x &= \lim_{R\to\infty}\oint_{\gamma_R}\frac{1}{z^4+1}\mathrm{d}z\\
&= 2\pi\,\mathrm{i}\left(\operatorname*{Res}_{z=z_1}+\operatorname*{Res}_{z=z_2}\right)\\
&= 2\pi\,\mathrm{i}\left(-\frac{1+\mathrm{i}}{2^{5/2}}+\frac{1-\mathrm{i}}{2^{5/2}}\right)\\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

□

אינטגרל מס' 2

האינטגרל הוא:

$$
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}\mathrm{d}x, \qquad a>0
$$

נשתמש באותה מסילה מהסעיף הקודם:

$$
\lim_{R\to\infty}\oint_{\gamma_R}\frac{1}{\left(z^2+a^2\right)^2}\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}\mathrm{d}x + \lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{1}{\left(z^2+a^2\right)^2}\mathrm{d}z
$$

על הקשת נקבל מאי־שוויון המשולש ההפוך:

$$
\left|z^2+a^2\right| \geq |z|^2-|a|^2 = R^2-|a|^2
$$

לכן כאשר $R\to\infty$:

$$
\left|\frac{1}{\left(z^2+a^2\right)^2}\right| \leq \frac{1}{R^2-|a|^2} \equiv M
$$

ומכאן:

$$
\left|\int_{C_R}\frac{1}{\left(z^2+a^2\right)^2}\mathrm{d}z\right| \leq ML = \frac{1}{R^2-|a|^2}\cdot\pi R \xrightarrow[R\to\infty]{} 0
$$

לכן:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2} \mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \oint_{\gamma_R} \frac{1}{\left(z^2+a^2\right)^2} \mathrm{d}z$$

נותר לחשב את האינטגרל המסילתי. קל לראות כי לפונקציה שני קטבים מסדר שני בנקודות $z = \pm \mathrm{i}\, a$:

$$\frac{1}{\left(z^2+a^2\right)^2} = \frac{1}{\left[\left(z+\mathrm{i}\, a\right)\left(z-\mathrm{i}\, a\right)\right]^2} = \frac{1}{\left(z+\mathrm{i}\, a\right)^2\left(z-\mathrm{i}\, a\right)^2}$$

רק הקוטב $z = \mathrm{i}\, a$ נמצא בתוך המסילה. נחשב את השארית בקוטב זה:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\left(z+\mathrm{i}\, a\right)^2\left(z-\mathrm{i}\, a\right)^2} &= \left(z-\mathrm{i}\, a\right)^{-2}\left(z+\mathrm{i}\, a\right)^{-2} \\
&= \left(z-\mathrm{i}\, a\right)^{-2}\left(z-\mathrm{i}\, a+2\,\mathrm{i}\, a\right)^{-2} \\
&= \left(z-\mathrm{i}\, a\right)^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n} \left(2\,\mathrm{i}\, a\right)^{-2-n}\left(z-\mathrm{i}\, a\right)^{n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n} \frac{1}{\left(2\,\mathrm{i}\, a\right)^{2+n}} \left(z-\mathrm{i}\, a\right)^{n-2} \\
&= \sum_{n=-2}^{\infty} \binom{-2}{n+2} \frac{1}{\left(2\,\mathrm{i}\, a\right)^{4+n}} \left(z-\mathrm{i}\, a\right)^{n}
\end{aligned}$$

מכאן:

$$\operatorname*{Res}_{z=\mathrm{i}\, a} \frac{1}{\left(z^2+a^2\right)^2} = \binom{-2}{-1+2} \frac{1}{\left(2\,\mathrm{i}\, a\right)^{4-1}} = \binom{-2}{1} \frac{1}{\left(2\,\mathrm{i}\, a\right)^{3}} = -2 \cdot \frac{1}{2^3\,\mathrm{i}^3\, a^3} = \frac{1}{4\,\mathrm{i}\, a^3}$$

ולכן:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2} \mathrm{d}x &= \lim_{R\to\infty} \oint_{\gamma_R} \frac{1}{\left(z^2+a^2\right)^2} \mathrm{d}z \\
&= 2\pi\,\mathrm{i} \operatorname*{Res}_{z=\mathrm{i}\, a} \frac{1}{\left(z^2+a^2\right)^2} \\
&= 2\pi\,\mathrm{i}\, \frac{1}{4\,\mathrm{i}\, a^3} \\
&= \frac{\pi}{2a^3}
\end{aligned}$$

□

אינטגרל מס' 3

האינטגרל הוא:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x \sin\left(\alpha x\right)}{x^2+\beta^2} \mathrm{d}x, \qquad \alpha, \beta > 0$$

נשתמש באותה מסילה מהסעיף הקודם:

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{\gamma_R} \frac{z \sin\left(\alpha z\right)}{z^2+\beta^2} \mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin\left(\alpha x\right)}{x^2+\beta^2} \mathrm{d}x + \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{z \sin\left(\alpha z\right)}{z^2+\beta^2} \mathrm{d}z$$

האינטגרנד זוגי, לכן:

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\infty} \frac{x \sin\left(\alpha x\right)}{x^2+\beta^2} \mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin\left(\alpha x\right)}{x^2+\beta^2} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \lim_{R\to\infty} \left[\oint_{\gamma_R} \frac{z \sin\left(\alpha z\right)}{z^2+\beta^2} \mathrm{d}z - \int_{C_R} \frac{z \sin\left(\alpha z\right)}{z^2+\beta^2} \mathrm{d}z\right] \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{Im}\left[\lim_{R\to\infty} \left(\oint_{\gamma_R} \frac{z\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha z}}{z^2+\beta^2} \mathrm{d}z - \int_{C_R} \frac{z\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha z}}{z^2+\beta^2} \mathrm{d}z\right)\right]
\end{aligned}$$

נשים לב כי האינטגרל הנתון הוא מהצורה:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha x}\,\mathrm{d}x$$

כאשר $\alpha > 0$ ו־$\left|f\left(R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right)\right| \to 0$ עבור $R \to \infty$. לכן, לפי **הלמה של ז'ורדן**, האינטגרל על הקשת מתאפס ונקבל:

$$\int_0^{\infty} \frac{x\sin(\alpha x)}{x^2+\beta^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left[\lim_{R\to\infty}\left(\oint_{\gamma_R}\frac{z\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha z}}{z^2+\beta^2}\mathrm{d}z\right)\right]$$

נותר לחשב את השאריות בתוך המסילה. ברור כי לאינטגרנד קטבים מסדר ראשון ב־$z = \pm\mathrm{i}\,\beta$. רק הקוטב $z = \mathrm{i}\,\beta$ נמצא בתוך המסילה, והשארית בו היא:

$$\operatorname*{Res}_{z=\mathrm{i}\,\beta}\frac{z\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha z}}{z^2+\beta^2} = \left.\frac{z\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha z}}{2z}\right|_{z=\mathrm{i}\,\beta} = \frac{\mathrm{e}^{-\alpha\beta}}{2}$$

מכאן:

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{x\sin(\alpha x)}{x^2+\beta^2}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left(2\pi\,\mathrm{i}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\alpha\beta}}{2}\right)\\ &= \frac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{-\alpha\beta}\end{aligned}$$

□

אינטגרל מס' 4

האינטגרל הוא:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2+1}\mathrm{d}x$$

נשים לב כי:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2} = \mathrm{Re}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,x}}{2}\right)$$

לכן:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2+1}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,x}}{x^2+1}\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,x}}{x^2+1}\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{1}{2}\left[\pi - \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,x}}{x^2+1}\mathrm{d}x\right)\right]\end{aligned}$$

לחישוב האינטגרל שבסוגריים נשתמש במסילה המוכרת:

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{\gamma_R}\frac{\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,z}}{z^2+1}\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,x}}{x^2+1}\mathrm{d}x + \lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,z}}{z^2+1}\mathrm{d}z$$

האינטגרל על הקשת מתאפס, לפי הלמה של ז'ורדן. לאינטגרנד יש שני קטבים פשוטים: $z = \pm\,\mathrm{i}$, מתוכם רק $z = \mathrm{i}$ בתוך מסלול האינטגרציה. בנקודה זו, השארית היא:

$$\operatorname*{Res}_{z=\mathrm{i}}\left(\frac{\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,z}}{z^2+1}\right) = \left.\frac{\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,z}}{2z}\right|_{z=\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^{-2}}{2\,\mathrm{i}}$$

לכן:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2+1}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\left[\pi - \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,x}}{x^2+1}\mathrm{d}x\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\pi - \mathrm{Re}\left(2\pi\,\mathrm{i}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-2}}{2\,\mathrm{i}}\right)\right]\\ &= \frac{\pi}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-2}\right)\end{aligned}$$

□

המסילה: מעגל היחידה

אינטגרל מס' 1

האינטגרל הוא:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+b\sin t}\mathrm{d}t, \qquad a>b>0$$

נבצע את החלפת המשתנים:

$$z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} \Longrightarrow \mathrm{d}z=\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}\,\mathrm{d}t \Longrightarrow \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}\,z}$$

ונקבל:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+b\sin t}\mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\frac{1}{2\mathrm{i}}b\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}\right)}\mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{a+\frac{1}{2\mathrm{i}}b\left(z-\frac{1}{z}\right)}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}\,z} \\ &= \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{az\,\mathrm{i}+\frac{1}{2}b\left(z^2-1\right)}\mathrm{d}z \\ &= \frac{2}{b}\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z^2+\frac{2\,\mathrm{i}\,a}{b}z-1}\mathrm{d}z\end{aligned}$$

כאשר $\mathcal{C}$ הוא מעגל היחידה. הקטבים (הפשוטים) של האינטגרנד הם:

$$z_{1,2}=\frac{-\frac{2\,\mathrm{i}\,a}{b}\pm\sqrt{\left(\frac{2\,\mathrm{i}\,a}{b}\right)^2+4}}{2}=-\frac{\mathrm{i}\,a}{b}\pm\sqrt{-\left(\frac{a}{b}\right)^2+1}\equiv\mathrm{i}\left(-r\pm\sqrt{r^2-1}\right)$$

כאשר $r\equiv\frac{a}{b}>1$ (כי $a>b>0$) ולכן $\sqrt{r^2-1}$ ממשי. נשים לב כי:

$$\left|\mathrm{i}\left(-r-\sqrt{r^2-1}\right)\right|=\left|r+\sqrt{r^2-1}\right|=r+\sqrt{r^2-1}>r>1$$

וקוטב זה נמצא מחוץ לתחום האינטגרציה. כמו כן:

$$r^2-1<r^2+1<r^2+2r+1=(r+1)^2$$

לכן:

$$\sqrt{r^2-1}<r+1$$

ומכאן:

$$\left|\mathrm{i}\left(-r+\sqrt{r^2-1}\right)\right|=-r+\sqrt{r^2-1}<1$$

והקוטב השני נמצא בתחום תחום האינטגרציה. השארית בו היא:

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=\mathrm{i}\left(-r+\sqrt{r^2-1}\right)}\left(\frac{1}{z^2+2rz-1}\right) &= \left.\frac{1}{2z+2r}\right|_{z=\mathrm{i}\left(-r+\sqrt{r^2-1}\right)} \\ &= \frac{1}{2\,\mathrm{i}\left(-r+\sqrt{r^2-1}\right)+2r} \\ &= \frac{1}{2\,\mathrm{i}\sqrt{r^2-1}} \\ &= \frac{1}{2\,\mathrm{i}\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2-1}}\end{aligned}$$

לכן:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{1}{a+b\sin t}\mathrm{d}t &= \frac{2}{b}\int_{\mathcal{C}}\frac{1}{z^2+\frac{2a}{b}z-1}\mathrm{d}z\\ &= \frac{2}{b}\cdot 2\pi\,\mathrm{i}\cdot\frac{1}{2\,\mathrm{i}\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2-1}}\\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}\end{aligned}$$

$\square$

אינטגרל מס' 2

האינטגרל הוא:

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+\sin^2 t}\mathrm{d}t$$

נרשום:

$$\sin^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2} = \frac{1-\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,t}+\mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\,t}\right)}{2} = \frac{2-\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,t}-\mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\,t}}{4}$$

נבצע החלפת משתנים $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}\implies \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}\,z}$, אז:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+\sin^2 t}\mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi}\frac{1}{1+\frac{2-\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,t}-\mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\,t}}{4}}\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{2\pi}\frac{4}{6-\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,t}-\mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\,t}}\mathrm{d}t\\ &= \int_{\mathcal{C}}\frac{4}{6-z^2-\frac{1}{z^2}}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}\,z}\\ &= 2\,\mathrm{i}\int_{\mathcal{C}}\frac{2z}{z^4-6z^2+1}\mathrm{d}z\\ &\left[w=z^2\implies \mathrm{d}w=2z\,\mathrm{d}z\right]\\ &= 2\,\mathrm{i}\int_{2\mathcal{C}}\frac{1}{w^2-6w+1}\mathrm{d}w\end{aligned}$$

כאשר $\mathcal{C}$ הוא מעגל היחידה. נשים לב כי לאחר החלפת המשתנים $w=z^2$ קיבלנו את המסילה $2\mathcal{C}$ שעוברת על מעגל היחידה **פעמיים**:

$$\mathcal{C}=\left\{z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}\middle|t\in[0,2\pi]\right\}$$

$$\begin{aligned}&\left\{w=z^2=\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,t}\middle|t\in[0,2\pi]\right\}\\ =&\left\{w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\middle|\theta\in[0,4\pi]\right\}\\ =&2\mathcal{C}\end{aligned}$$

לכן:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+\sin^2 t}\mathrm{d}t &= 2\,\mathrm{i}\int_{2\mathcal{C}}\frac{1}{w^2-6w+1}\mathrm{d}w\\ &= 4\,\mathrm{i}\int_{\mathcal{C}}\frac{1}{w^2-6w+1}\mathrm{d}w\end{aligned}$$

כעת, שורשי הפונקציה הריבועית שבמכנה הם:

$$w_{1,2} = 3 \pm \sqrt{8}$$

ושניהם קטבים פשוטים של האינטגרנד. ברור כי $w_1 = 3 + \sqrt{8}$ נמצא מחוץ למעגל היחידה. לעומת זאת:

$$\left(1 + \sqrt{8}\right)^2 = 1 + 2\sqrt{8} + 8 = 9 + 2\sqrt{8} > 9$$

נוציא שורש ריבועי ונקבל:

$$3 < 1 + \sqrt{8} \Longrightarrow 3 - \sqrt{8} < 1$$

בנוסף:

$$8 < 9 \Longrightarrow \sqrt{8} < \sqrt{9} = 3 \Longrightarrow 0 < 3 - \sqrt{8}$$

לכן:

$$\left|3 - \sqrt{8}\right| < 1$$

והקוטב השני נמצא בתוך מעגל היחידה. נותר לחשב את השארית בקוטב זה:

$$\operatorname*{Res}_{w=3-\sqrt{8}} \left(\frac{1}{w^2 - 6w + 1}\right) = \frac{1}{2w - 6}\bigg|_{w=3-\sqrt{8}} = \frac{1}{2\left(3 - \sqrt{8}\right) - 6} = -\frac{1}{2\sqrt{8}}$$

מכאן:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \sin^2 t}\mathrm{d}t &= 4\,\mathrm{i}\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{w^2 - 6w + 1}\mathrm{d}w \\ &= 4\,\mathrm{i}\cdot 2\pi\,\mathrm{i}\left(-\frac{1}{2\sqrt{8}}\right) \\ &= \frac{4\pi}{\sqrt{8}} \\ &= \sqrt{2}\pi\end{aligned}$$

□

אינטגרל מס' 3

האינטגרל הוא:

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 t}{a+\cos t}\mathrm{d}t, \qquad a>1$$

כבסעיפים הקודמים, נרשום:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 t}{a+\cos t}\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{1-\cos(2t)}{a+\cos t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2t)}{a+\cos t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{1-\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,t}+\mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\,t}\right)}{a+\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}\right)}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{2-\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,t}-\mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\,t}}{2a+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}\mathrm{d}t \\
&\left[z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} \Longrightarrow \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}\,z}\right] \\
&= \frac{1}{4}\int_{\mathcal{C}} \frac{2-z^2-\frac{1}{z^2}}{2a+z+\frac{1}{z}}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}\,z} \\
&= -\frac{1}{4\,\mathrm{i}}\int_{\mathcal{C}} \frac{z^4-2z^2+1}{z^2\left(z^2+2az+1\right)}\mathrm{d}z \\
&= \frac{\mathrm{i}}{4}\int_{\mathcal{C}} \frac{\left(z^2-1\right)^2}{z^2\left(z^2+2az+1\right)}\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

כאשר בשורה השנייה השתמשנו בכך שהאינטגרנד הוא סימטרי סביב π, וכרגיל $\mathcal{C}$ הוא מעגל היחידה. שורשי הפונקציה הריבועית שבמכנה הם:

$$z_{+,-} = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2-4}}{2} = -a \pm \sqrt{a^2-1}$$

קל לראות כי שורשים אלה אינם מתלכדים עם השורשים של המונה, ולכן הם קטבים פשוטים של האינטגרנד. בנוסף, 0 הוא קוטב מסדר שני. כעת, נשים לב כי:

$$|z_-| = \left|-a-\sqrt{a^2-1}\right| = a+\sqrt{a^2-1} > a > 1$$

לכן קוטב זה אינו בתוך תחום האינטגרציה. מצד שני:

$$\begin{aligned}
&1<a \\
\Rightarrow&-2a<-2 \\
\Rightarrow&-2a+1<-1 \\
\Rightarrow&a^2-2a+1<a^2-1 \\
\Rightarrow&(a-1)^2<a^2-1 \\
\Rightarrow&a-1<\sqrt{a^2-1} \\
\Rightarrow&a-\sqrt{a^2-1}<1
\end{aligned}$$

וגם:

$$\begin{aligned}
&a^2-1<a^2 \\
\Rightarrow&\sqrt{a^2-1}<a \\
\Rightarrow&0<a-\sqrt{a^2-1}
\end{aligned}$$

לכן:

$$|z_+| = \left|-a+\sqrt{a^2-1}\right| = a-\sqrt{a^2-1} < 1$$

לכן קוטב זה כן נמצא בתוך תחום האינטגרציה. נותר לחשב את השאריות. נתחיל עם השארית ב־$z=0$, היא הקלה יותר. נשתמש בנוסחה:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-z_0)^2 f(z)\right]\right\}$$

מכאן:

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=0}\left[\frac{\left(z^2-1\right)^2}{z^2\left(z^2+2az+1\right)}\right] &= \lim_{z\to 0}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z^2\cdot\frac{\left(z^2-1\right)^2}{z^2\left(z^2+2az+1\right)}\right)\right] \\
&= \lim_{z\to 0}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{\left(z^2-1\right)^2}{z^2+2az+1}\right)\right] \\
&= \lim_{z\to 0}\left[\frac{4z\left(z^2-1\right)\left(z^2+2az+1\right)-\left(z^2-1\right)^2(2z+2a)}{\left(z^2+2az+1\right)^2}\right] \\
&= \frac{0-(0-1)^2(0+2a)}{(0+1)^2} \\
&= -2a
\end{aligned}$$

השארית ב־z_+ היא (לא כללנו כאן את החישוב המפורש, מפני שהוא ארוך למדי):

$$\operatorname*{Res}_{z=z_+}\left[\frac{\left(z^2-1\right)^2}{z^2\left(z^2+2az+1\right)}\right] = 2\sqrt{a^2-1}$$

מכאן:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \frac{\sin^2 t}{a+\cos t}\mathrm{d}t &= \frac{\mathrm{i}}{4}\int_{\mathcal{C}}\frac{\left(z^2-1\right)^2}{z^2\left(z^2+2az+1\right)}\mathrm{d}z \\
&= \frac{\mathrm{i}}{4}\cdot 2\pi\,\mathrm{i}\left(\operatorname*{Res}_{z=0}+\operatorname*{Res}_{z=z_+}\right) \\
&= -\frac{\pi}{2}\left(-2a+2\sqrt{a^2-1}\right) \\
&= \pi\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)
\end{aligned}$$

□

אינטגרל מס' 4

האינטגרל הוא:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a+\sin^2 x}\mathrm{d}x, \qquad a\in\mathbb{R}$$

נעבור לאינטגרל מרוכב:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a+\sin^2 x}\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a+\frac{1-\cos(2x)}{2}}\mathrm{d}x \\
&\left[y=2x \Longrightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}y\right] \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{1}{a+\frac{1-\cos y}{2}}\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\pi} \frac{1}{2a+1-\cos y}\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2a+1-\cos y}\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2a+1-\frac{\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,y}+\mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\,y}}{2}}\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4a+2-\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,y}-\mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\,y}}\mathrm{d}y \\
&\left[z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,y} \Longrightarrow \mathrm{d}y = \frac{1}{\mathrm{i}\,z}\mathrm{d}z\right] \\
&= \oint_{\mathcal{C}} \frac{1}{4a+2-z^2-\frac{1}{z^2}}\frac{1}{\mathrm{i}\,z}\mathrm{d}z \\
&= \mathrm{i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{z}{z^4-(4a+2)\,z^2+1}\mathrm{d}z \\
&\left[w=z^2 \Longrightarrow z\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\mathrm{d}w\right] \\
&= \frac{\mathrm{i}}{2}\oint_{2\mathcal{C}} \frac{1}{w^2-(4a+2)\,w+1}\mathrm{d}w
\end{aligned}
$$

כאשר $\mathcal{C}$ הוא מעגל היחידה. נשים לב כי לאחר החלפת המשתנים $w=z^2$ קיבלנו את המסילה $2\mathcal{C}$ שעוברת על מעגל היחידה **פעמיים**:

$$
\mathcal{C} = \left\{z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}\middle|t\in[0,2\pi]\right\}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left\{w=z^2=\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,t}\middle|t\in[0,2\pi]\right\} \\
=&\left\{w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\middle|\theta\in[0,4\pi]\right\} \\
=&2\mathcal{C}
\end{aligned}
$$

לכן:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a+\sin^2 x}\mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{i}}{2}\oint_{2\mathcal{C}} \frac{1}{w^2-(4a+2)\,w+1}\mathrm{d}w \\
&\mathrm{i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{1}{w^2-2bw+1}\mathrm{d}w
\end{aligned}
$$

כאשר סימנו $b\equiv 2a+1$. שורשי הפונקציה הריבועית שבמכנה הם:

$$
w = b\pm\sqrt{b^2-1}
$$

כעת נפצל למקרים.

אם $a\in[-1,0]$ אז האינטגרל מתבדר, כי $\sin^2 x$ מקבל בקטע $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ את כל הערכים בין 0 ל־1 ובפרט את הערך $-a$.

אם $a>0$ אז $b>1$ ואז נקבל:

$$\left|b+\sqrt{b^2-1}\right| = b+\sqrt{b^2-1} > b > 1$$

וקוטב זה נמצא מחוץ למעגל היחידה. מצד שני:

$$2<2b \Longrightarrow -2b+1<-1 \Longrightarrow b^2-2b+1=(b-1)^2<b^2-1 \Longrightarrow b-1<\sqrt{b^2-1} \Longrightarrow b-\sqrt{b^2-1}<1$$

$$b^2>b^2-1 \Longrightarrow b>\sqrt{b^2-1} \Longrightarrow b-\sqrt{b^2-1}>0$$

לכן:

$$\left|b-\sqrt{b^2-1}\right| = b-\sqrt{b^2-1} < 1$$

וקוטב זה כן נמצא בתוך מעגל היחידה. ממשפט השארית:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a+\sin^2 x}\mathrm{d}x &= \mathrm{i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{1}{w^2-2bw+1}\mathrm{d}w \\
&= \mathrm{i}\cdot 2\pi\,\mathrm{i} \operatorname*{Res}_{z=b-\sqrt{b^2-1}}\left(\frac{1}{w^2-2bw+1}\right) \\
&= -2\pi\frac{1}{z-\left(b+\sqrt{b^2-1}\right)}\bigg|_{z=b-\sqrt{b^2-1}} \\
&= -2\pi\frac{1}{b-\sqrt{b^2-1}-\left(b+\sqrt{b^2-1}\right)} \\
&= -2\pi\frac{1}{-2\sqrt{b^2-1}} \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{b^2-1}} \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{(2a+1)^2-1}} \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{4a^2+4a+1-1}} \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{a\,(a+1)}}
\end{aligned}$$

לבסוף, אם $a<-1$ אז $b<-1$ ואז נקבל:

$$\left|b-\sqrt{b^2-1}\right| = \sqrt{b^2-1}-b > \sqrt{b^2-1}+1 > 1$$

וקוטב זה נמצא מחוץ למעגל היחידה. מצד שני:

$$\begin{aligned}
&b<-1 \\
\Rightarrow & 2b<-2 \\
\Rightarrow & 2b+1<-1<0 \\
\Rightarrow & b^2+2b+1<b^2-1<b^2 \\
\Rightarrow & (b+1)^2<b^2-1<b^2 \\
\Rightarrow & |b+1|<\sqrt{b^2-1}<|b| \\
\Rightarrow & -b-1<\sqrt{b^2-1}<-b \\
\Rightarrow & -1<b+\sqrt{b^2-1}<0
\end{aligned}$$

לכן:

$$\left|b+\sqrt{b^2-1}\right|<1$$

וקוטב זה כן נמצא בתוך מעגל היחידה. ממשפט השארית:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a+\sin^2 x}\mathrm{d}x &= \mathrm{i}\oint_C\frac{1}{w^2-2bw+1}\mathrm{d}w\\ &= \mathrm{i}\cdot 2\pi\,\mathrm{i}\operatorname*{Res}_{z=b+\sqrt{b^2-1}}\left(\frac{1}{w^2-2bw+1}\right)\\ &= -2\pi\frac{1}{z-\left(b-\sqrt{b^2-1}\right)}\bigg|_{z=b+\sqrt{b^2-1}}\\ &= -2\pi\frac{1}{b+\sqrt{b^2-1}-\left(b-\sqrt{b^2-1}\right)}\\ &= -2\pi\frac{1}{2\sqrt{b^2-1}}\\ &= -\frac{\pi}{\sqrt{b^2-1}}\\ &= -\frac{\pi}{\sqrt{(2a+1)^2-1}}\\ &= -\frac{\pi}{\sqrt{4a^2+4a+1-1}}\\ &= -\frac{\pi}{2\sqrt{a(a+1)}}\end{aligned}$$

$\square$

המסילה: "חור המנעול"

אינטגרל מס' 1

האינטגרל הוא:

$$\int_0^\infty\frac{x^{-a}}{x+1}\mathrm{d}x,\qquad 0<a<1$$

לשם פתירתו, נסביר תחילה על **קווי חתך**. נסמן $z=r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$, אז:

$$z^{-a}=\mathrm{e}^{-a\log z}=\mathrm{e}^{-a\log\left(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right)}=\mathrm{e}^{-a(\log r+\mathrm{i}\,\theta)}=\mathrm{e}^{-a\log r}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,a\theta}$$

אך הזווית θ אינה מוגדרת היטב: $r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}=r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+2\pi k)}$ לכל $k\in\mathbb{Z}$. לכן, כדי שהפונקציה בתוך האינטגרל תהיה מוגדרת היטב (חד־ערכית), אנו חייבים לבחור ענף מסוים של θ, כלומר לבחור תחום באורך 2π של θ איתו נעבוד. נבחר, אם כן, $\theta\in(0,2\pi)$. על הקטע $[0,\infty)$ במישור המרוכב הפונקציה לא רציפה, כי מצד אחד ניתן להגיע אליו באמצעות $\theta\searrow 0$ (θ שואפת ל־0 מלמעלה):

$$\lim_{\theta\searrow 0}\mathrm{e}^{-a\log r}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,a\theta}=\mathrm{e}^{-a\log r}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,a\cdot 0}=\mathrm{e}^{-a\log r}$$

ומצד שני, ניתן גם להגיע אליו באמצעות $\theta\nearrow 2\pi$ (θ שואפת ל־2π מלמטה):

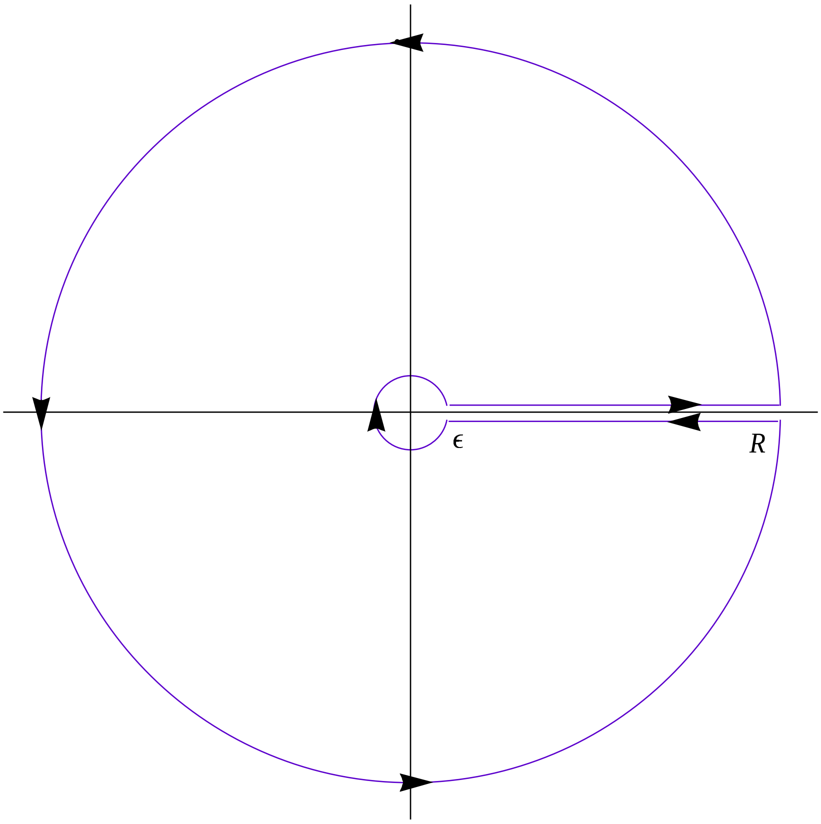
$$\lim_{\theta\nearrow 2\pi}\mathrm{e}^{-a\log r}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,a\theta}=\mathrm{e}^{-a\log r}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,a\cdot 2\pi}=\mathrm{e}^{-a\log r}\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,a}$$

מאחר ש־$a\neq 0$, שתי התוצאות שקיבלנו שונות (בפקטור $\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,a}$), והפונקציה לא רציפה על הקטע. לכן נגדיר את הקטע $[0,\infty)$ כקו חתך, והפונקציה z^{-a} תהיה מוגדרת רק על המישור "החתוך" $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)=\{\theta\in(0,2\pi)\}$.

הפונקציה המרוכבת עליה נבצע את האינטגרציה היא, אם כן:

$$f\left(z\right)=\frac{z^{-a}}{z+1}=\frac{r^{-a}\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,a\theta}}{z+1},\qquad\theta\in\left(0,2\pi\right)$$

כדי לבצע את האינטגרציה נשתמש במסילה הבאה (מסילת "חור המנעול"):



נשים לב כי המסילה "עוקפת" את קו החתך שהגדרנו. נסמן אותה ב־γ. המסילה מורכבת מ־4 חלקים:

$$\gamma=\gamma_{\varepsilon}+I_{+}+\Gamma_{R}+I_{-}$$

כאשר γ_{ε} הוא מעגל קטן ברדיוס $\varepsilon\to0$ מסביב ל־0, Γ_{R} הוא מעגל גדול ברדיוס $R\to\infty$ מסביב ל־0 ו־I_{+},I_{-} הם הקטע $\left[\varepsilon,R\right]$ על הציר הממשי כך ש־I_{+} הוא על "השפה העליונה" של קו החתך ($\theta=0$) ואילו I_{-} הוא על "השפה התחתונה" ($\theta=2\pi$). אז מתקיים:

$$\oint_{\gamma}f\left(z\right)\mathrm{d}z=\lim_{\varepsilon\to0,R\to\infty}\left(\int_{\gamma_{\varepsilon}}+\int_{\Gamma_{R}}+\int_{I_{+}}+\int_{I_{-}}\right)f\left(z\right)\mathrm{d}z$$

לפונקציה $\frac{z^{-a}}{z+1}$ קוטב אחד פשוט בתוך תחום האינטגרציה, $z=-1$, ובו השארית היא:

$$\operatorname*{Res}_{z=-1}\left(\frac{z^{-a}}{z+1}\right)=\left(-1\right)^{-a}=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi}\right)^{-a}=\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\pi a}$$

לכן:

$$\oint_{\gamma}f\left(z\right)\mathrm{d}z=2\pi\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\pi a}$$

כעת, נשים לב כי:

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to0}\left|\int_{\gamma_\varepsilon} f\left(z\right)\mathrm{d}z\right| &= \lim_{\varepsilon\to0}\left|\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{\varepsilon^{-a}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,a\theta}}{\varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}+1}\mathrm{d}z\right| \\ &\le \lim_{\varepsilon\to0}\left[\max_{\gamma_\varepsilon}\left(\left|\frac{\varepsilon^{-a}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,a\theta}}{\varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}+1}\right|\right)\cdot L\left(\gamma_\varepsilon\right)\right] \\ &= \lim_{\varepsilon\to0}\left[\max_{\gamma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon^{-a}}{\left|\varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}+1\right|}\right)\cdot 2\pi\varepsilon\right]\end{aligned}$$

מאי־שוויון המשולש ההפוך:

$$\left|\varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}+1\right| \ge \left|\left|\varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right|-\left|1\right|\right| = 1-\varepsilon$$

לכן לכל θ מתקיים:

$$\frac{\varepsilon^{-a}}{\left|\varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}+1\right|} \le \frac{\varepsilon^{-a}}{1-\varepsilon}$$

ומכאן:

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left[\max_{\gamma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon^{-a}}{\left|\varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}+1\right|}\right)\cdot 2\pi\varepsilon\right] = \lim_{\varepsilon\to0}\left(\frac{\varepsilon^{-a}}{1-\varepsilon}\cdot 2\pi\varepsilon\right) = 2\pi\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\varepsilon^{1-a}}{1-\varepsilon} = 0$$

(נזכור כי $0<a<1$ ולכן $0<1-a<1$). מכאן נסיק כי האינטגרל על γ_ε מתאפס.

בדומה, מתקיים:

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\left|\int_{\Gamma_R} f\left(z\right)\mathrm{d}z\right| &= \lim_{R\to\infty}\left|\int_{\Gamma_R}\frac{R^{-a}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,a\theta}}{R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}+1}\mathrm{d}z\right| \\ &\le \lim_{R\to\infty}\left|\max_{\Gamma_R}\left(\left|\frac{R^{-a}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,a\theta}}{R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}+1}\right|\right)\cdot L\left(\Gamma_R\right)\right| \\ &= \lim_{R\to\infty}\left|\max_{\Gamma_R}\left(\frac{R^{-a}}{\left|R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}+1\right|}\right)\cdot 2\pi R\right|\end{aligned}$$

מאי־שוויון המשולש ההפוך:

$$\left|R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}+1\right| \ge \left|\left|R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right|-\left|1\right|\right| = R-1$$

לכן לכל θ מתקיים:

$$\frac{R^{-a}}{\left|R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}+1\right|} \le \frac{R^{-a}}{R-1}$$

ומכאן:

$$\lim_{R\to\infty}\left|\max_{\Gamma_R}\left(\frac{R^{-a}}{\left|R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}+1\right|}\right)\cdot 2\pi R\right| = \lim_{R\to\infty}\left|\frac{R^{-a}}{R-1}\cdot 2\pi R\right| = 2\pi\lim_{R\to\infty}\frac{R^{1-a}}{R-1} = 0$$

וגם האינטגרל על Γ_R מתאפס.

לבסוף, נשים לב כי:

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to0,R\to\infty}\left(\int_{I_+} f\left(z\right)\mathrm{d}z+\int_{I_-} f\left(z\right)\mathrm{d}z\right) &= \lim_{\varepsilon\to0,R\to\infty}\left(\int_{[\varepsilon,R]}\frac{r^{-a}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,a\cdot0}}{z+1}\mathrm{d}z+\int_{[R,\varepsilon]}\frac{r^{-a}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,a\cdot2\pi}}{z+1}\mathrm{d}z\right) \\ &= \lim_{\varepsilon\to0,R\to\infty}\left(1-\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,a}\right)\int_{[\varepsilon,R]}\frac{r^{-a}}{z+1}\mathrm{d}z \\ &= \left(1-\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,a}\right)\int_0^\infty\frac{x^{-a}}{x+1}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

ומכאן:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x^{-a}}{x+1}\mathrm{d}x &= \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,a}}\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\\ &= \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,a}}\cdot 2\pi\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\pi a}\\ &= \frac{2\,\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi a}-\mathrm{e}^{-\pi\,\mathrm{i}\,a}}\cdot\pi\\ &= \frac{\pi}{\sin(\pi a)}\end{aligned}$$

□

אינטגרל מס' 2

האינטגרל הוא:

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^a(x+1)}\mathrm{d}x,\qquad 0<a<1$$

נרשום את האינטגרל כך:

$$\int_0^\infty \frac{x^{-a}\log x}{x+1}\mathrm{d}x$$

אנו רואים כי הפונקציה בתוך האינטגרל היא הפונקציה מהסעיף הקודם מוכפלת ב־$\log x$. נגדיר:

$$f(z)=\frac{z^{-a}\log z}{z+1}=\frac{r^{-a}\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,a\theta}\log\left(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right)}{z+1}=\frac{r^{-a}\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,a\theta}\left(\log r+\mathrm{i}\,\theta\right)}{z+1}$$

פונקציה זו אנליטית בתוך המסילה γ מהסעיף הקודם ומתקיים:

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=\lim_{\gamma\to 0,R\to\infty}\left(\int_{\gamma_\varepsilon}+\int_{\Gamma_R}+\int_{I_+}+\int_{I_-}\right)f(z)\,\mathrm{d}z$$

לפונקציה $\frac{z^{-a}\log z}{z+1}$ קוטב אחד פשוט בתוך תחום האינטגרציה, $z=-1$, ובו מתקיים:

$$\operatorname*{Res}_{z=-1}\left(\frac{z^{-a}\log z}{z+1}\right)=(-1)^{-a}\log(-1)=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi}\right)^{-a}\log\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi}\right)=\mathrm{i}\,\pi\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\pi a}$$

לכן:

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi\,\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}\,\pi\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\pi a}=-2\pi^2\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\pi a}$$

כעת, על המעגל הקטן נקבל:

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z\right| &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left|\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{\varepsilon^{-a}\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,a\theta}\log\left(\varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right)}{\varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}+1}\mathrm{d}z\right|\\ &\le \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\max_{\gamma_\varepsilon}\left(\left|\frac{\varepsilon^{-a}\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,a\theta}\log\left(\varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right)}{\varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}+1}\right|\right)\cdot L(\gamma_\varepsilon)\right]\\ &\le \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\max_{\gamma_\varepsilon}\left(\varepsilon^{-a}\frac{\left|\log\varepsilon+\mathrm{i}\,\theta\right|}{\left|\varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}+1\right|}\right)\cdot 2\pi\varepsilon\right]\end{aligned}$$

נשים לב כי:

$$\left|\varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}+1\right|\ge 1-\varepsilon$$

וכמו כן:

$$|\log \varepsilon + \mathrm{i}\,\theta| \leq |\log \varepsilon| + |\mathrm{i}\,\theta| = \theta - \log \varepsilon \leq 2\pi - \log \varepsilon$$

($\varepsilon \to 0$ ולכן $\log \varepsilon < 0$, ונזכור כי $(\theta \in (0, 2\pi)$. מכאן:

$$\max_{\gamma_\varepsilon} \left(\varepsilon^{-a} \frac{|\log \varepsilon + \mathrm{i}\,\theta|}{|\varepsilon \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + 1|} \right) = \varepsilon^{-a} \frac{2\pi - \log \varepsilon}{1 - \varepsilon}$$

ולכן:

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\max_{\gamma_\varepsilon} \left(\varepsilon^{-a} \frac{|\log \varepsilon + \mathrm{i}\,\theta|}{|\varepsilon \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + 1|} \right) \cdot 2\pi\varepsilon \right] &= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\varepsilon^{-a} \frac{2\pi - \log \varepsilon}{1 - \varepsilon} \cdot 2\pi\varepsilon \right) \\
&= 2\pi \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{2\pi\varepsilon^{1-a} - \varepsilon^{1-a} \log \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בתוצאה הידועה:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^b \log \varepsilon \to 0, \qquad b > 0$$

ובעובדה כי $0 < a < 1 \Longrightarrow 0 < 1 - a < 1$. מכאן, האינטגרל על המעגל הקטן מתאפס.

על המעגל הגדול נקבל:

$$\begin{aligned}
\lim_{R \to \infty} \left| \int_{\Gamma_R} f(z) \, \mathrm{d}z \right| &= \lim_{R \to \infty} \left| \int_{\Gamma_R} \frac{R^{-a} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,a\theta} \log \left(R \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \right)}{R \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + 1} \mathrm{d}z \right| \\
&\leq \lim_{R \to \infty} \left[\max_{\Gamma_R} \left(\left| \frac{R^{-a} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,a\theta} \log \left(R \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \right)}{R \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + 1} \right| \right) \cdot L(\Gamma_R) \right] \\
&\leq \lim_{R \to \infty} \left[\max_{\Gamma_R} \left(R^{-a} \frac{|\log R + \mathrm{i}\,\theta|}{|R \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + 1|} \right) \cdot 2\pi R \right]
\end{aligned}$$

הפעם:

$$\left| R \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + 1 \right| \geq R - 1, \qquad |\log R + \mathrm{i}\,\theta| \leq 2\pi + \log R$$

ולכן:

$$\begin{aligned}
\lim_{R \to \infty} \left[\max_{\Gamma_R} \left(R^{-a} \frac{|\log R + \mathrm{i}\,\theta|}{|R \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + 1|} \right) \cdot 2\pi R \right] &= \lim_{R \to \infty} \left(R^{-a} \frac{2\pi + \log R}{R - 1} \cdot 2\pi R \right) \\
&= 2\pi \lim_{R \to \infty} \left(\frac{2\pi R^{1-a} + R^{1-a} \log R}{R - 1} \right) \\
&= 2\pi \lim_{R \to \infty} \left(\frac{2\pi(1-a)}{R^a} + \frac{\log R}{R^a} + \frac{1}{R^a} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

כאשר בין השורה השנייה לשלישית השתמשנו בכלל לופיטל, וכמו כן השתמשנו בתוצאה הידועה:

$$\lim_{R \to \infty} \frac{\log R}{R^b} \to 0, \qquad b > 0$$

מכאן, האינטגרל על המעגל הגדול מתאפס.

לבסוף, נשים לב כי:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\gamma\to0,R\to\infty}\left(\int_{I_+}f\left(z\right)\mathrm{d}z+\int_{I_-}f\left(z\right)\mathrm{d}z\right)\\
&=\lim_{\gamma\to0,R\to\infty}\left(\int_{[\varepsilon,R]}\frac{r^{-a}\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,a\cdot0}\left(\log r+\mathrm{i}\cdot0\right)}{z+1}\mathrm{d}z+\int_{[R,\varepsilon]}\frac{r^{-a}\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,a\cdot2\pi}\left(\log r+\mathrm{i}\cdot2\pi\right)}{z+1}\mathrm{d}z\right)\\
&=\lim_{\gamma\to0,R\to\infty}\left(\int_{[\varepsilon,R]}\frac{r^{-a}\log r}{z+1}\mathrm{d}z-\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,a}\int_{[\varepsilon,R]}\frac{r^{-a}\left(\log r+2\pi\,\mathrm{i}\right)}{z+1}\mathrm{d}z\right)\\
&=\int_0^\infty\frac{x^{-a}\log x}{x+1}\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,a}\int_0^\infty\frac{x^{-a}\left(\log x+2\pi\,\mathrm{i}\right)}{x+1}\mathrm{d}x\\
&=\int_0^\infty\frac{x^{-a}\log x}{x+1}\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,a}\left(\int_0^\infty\frac{x^{-a}\log x}{x+1}\mathrm{d}x+2\pi\,\mathrm{i}\int_0^\infty\frac{x^{-a}}{x+1}\mathrm{d}x\right)\\
&=\int_0^\infty\frac{x^{-a}\log x}{x+1}\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,a}\int_0^\infty\frac{x^{-a}\log x}{x+1}\mathrm{d}x-2\pi\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,a}\cdot\frac{\pi}{\sin\left(\pi a\right)}\\
&=\left(1-\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,a}\right)\int_0^\infty\frac{x^{-a}\log x}{x+1}\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,a}\,\frac{2\pi^2\,\mathrm{i}}{\sin\left(\pi a\right)}
\end{aligned}$$

ומכאן:

$$\left(1-\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,a}\right)\int_0^\infty\frac{x^{-a}\log x}{x+1}\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,a}\,\frac{2\pi^2\,\mathrm{i}}{\sin\left(\pi a\right)}=\oint_\gamma f\left(z\right)\mathrm{d}z=-2\pi^2\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\pi a}$$

לכן:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty\frac{x^{-a}\log x}{x+1}\mathrm{d}x&=\frac{\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,a}\,\frac{2\pi^2\,\mathrm{i}}{\sin(\pi a)}-2\pi^2\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\pi a}}{1-\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,a}}\\
&=\frac{\mathrm{e}^{-\pi\,\mathrm{i}\,a}\,\frac{2\pi^2\,\mathrm{i}}{\sin(\pi a)}-2\pi^2}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi a}-\mathrm{e}^{-\pi\,\mathrm{i}\,a}}\\
&=\frac{2\,\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi a}-\mathrm{e}^{-\pi\,\mathrm{i}\,a}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\pi\,\mathrm{i}\,a}\,\frac{2\pi^2\,\mathrm{i}}{\sin(\pi a)}-2\pi^2}{2\,\mathrm{i}}\\
&=\frac{1}{\sin\left(\pi a\right)}\cdot\frac{\pi^2\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\pi\,\mathrm{i}\,a}\,\frac{1}{\sin(\pi a)}-\pi^2}{\mathrm{i}}\\
&=\frac{\pi^2}{\sin\left(\pi a\right)}\cdot\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\pi\,\mathrm{i}\,a}-\sin\left(\pi a\right)}{\mathrm{i}\sin\left(\pi a\right)}\\
&=\frac{\pi^2}{\sin^2\left(\pi a\right)}\cdot\left(\mathrm{e}^{-\pi\,\mathrm{i}\,a}-\frac{\sin\left(\pi a\right)}{\mathrm{i}}\right)\\
&=\frac{\pi^2}{\sin^2\left(\pi a\right)}\cdot\left(\mathrm{e}^{-\pi\,\mathrm{i}\,a}-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi a}-\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\pi a}}{2\,\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}}\right)\\
&=\frac{\pi^2}{\sin^2\left(\pi a\right)}\cdot\left(\mathrm{e}^{-\pi\,\mathrm{i}\,a}+\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi a}-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\pi a}\right)\\
&=\frac{\pi^2}{\sin^2\left(\pi a\right)}\cdot\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\pi\,\mathrm{i}\,a}+\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi a}\right)\\
&=\frac{\pi^2\cos\left(\pi a\right)}{\sin^2\left(\pi a\right)}
\end{aligned}$$

$\square$

אינטגרל מס' 3

האינטגרל הוא:

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x^n+1}\mathrm{d}x, \qquad -1<\alpha<n-1, \qquad n\in\mathbb{N}$$

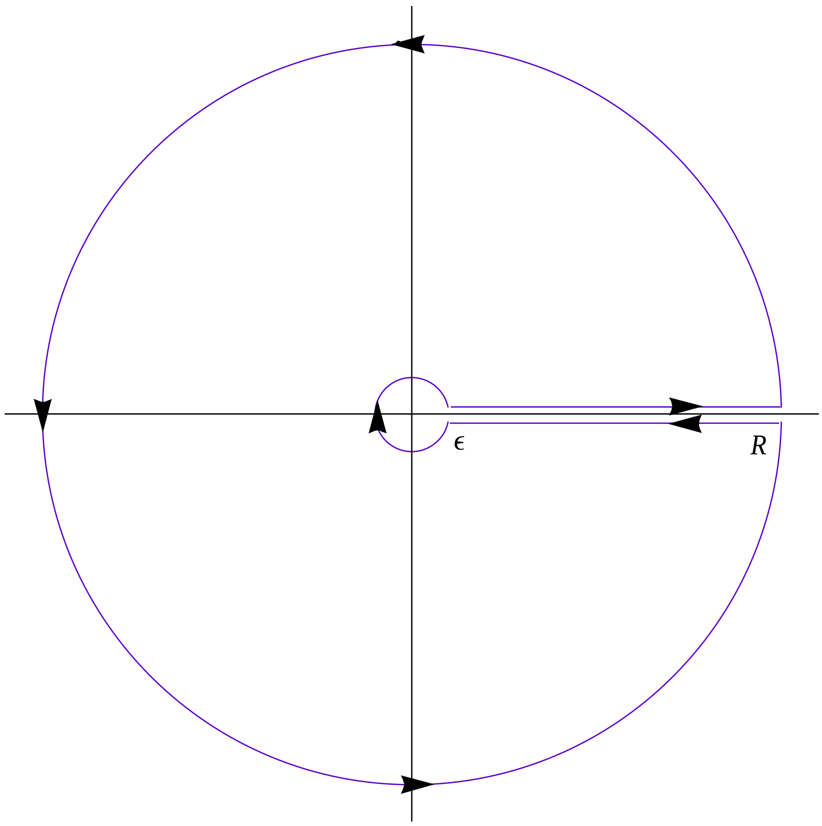
נשים לב כי:

$$z^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha\log z}$$

לכן עלינו לדאוג שהאינטגרציה תתבצע בתוך אותו ענף של $\log z$. נקודת הענף היא $z=0$, והמסילה שלנו לא יכולה לעשות סיבוב שלם סביב נקודה זו. נבחר את קו החתך להיות הישר הממשי האי־שלילי $[0,\infty)$, כך שכל עוד המסילה לא חתכה את קו החתך, אנו יודעים שנשארנו באותו ענף של $\log z$. נבחר את הענף שלנו להיות:

$$z^\alpha = r^\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha\theta}, \qquad \theta\in(0,2\pi)$$

כאשר $\theta=0$ בשפה העליונה של קו החתך ו־$\theta=2\pi$ בשפה התחתונה. נשתמש שוב במסילת "חור המנעול":



כאשר $\varepsilon\to0$ ו־$R\to\infty$ המסילה מקיפה למעשה את כל המישור החתוך $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$ עליו מוגדר הענף של z^α (או בעצם של $\log z$) שבחרנו. (כמו בסעיפים הקודמים)

המסילה מורכבת מ־4 חלקים:

$$\gamma=\gamma_\varepsilon+I_++\Gamma_R+I_-$$

כאשר γ_ε הוא מעגל קטן ברדיוס $\varepsilon\to0$ מסביב ל־0, Γ_R הוא מעגל גדול ברדיוס $R\to\infty$ מסביב ל־0 ו־I_+,I_- הם הקטע $[\varepsilon,R]$ על הציר הממשי כך ש־I_+ הוא על "השפה העליונה" של קו החתך ($\theta=0$) ואילו I_- הוא על "השפה התחתונה" ($\theta=2\pi$). (למעשה, אם היינו רוצים להיות קפדניים יותר, היינו צריכים להגדיר

$I_+ = [\varepsilon + \mathrm{i}\,\delta, R + \mathrm{i}\,\delta]$ ו־$I_- = [\varepsilon - \mathrm{i}\,\delta, R - \mathrm{i}\,\delta]$, וכאשר $\delta \to 0$ הקטעים מתקרבים יותר ויותר לקו החתך בלי לגעת בו. בחישוב שלהלן, כמו בסעיפים הקודמים, נוותר על הפורמליות הזו.) אז מתקיים:

$$\oint_{\gamma} \frac{z^{\alpha}}{z^n + 1} \mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon \to 0, R \to \infty} \left(\int_{\gamma_\varepsilon} + \int_{\Gamma_R} + \int_{I_+} + \int_{I_-} \right) \frac{z^{\alpha}}{z^n + 1} \mathrm{d}z$$

לפונקציה שלנו יש n קטבים פשוטים:

$$z_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi + 2\pi k}{n}}, \qquad k \in \{0, \dots, n-1\}$$

השארית בכל קוטב היא:

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=z_k} \left(\frac{z^{\alpha}}{z^n + 1} \right) &= \left. \frac{z^{\alpha}}{n z^{n-1}} \right|_{z=z_k} \\
&= \left. \frac{1}{n} z^{\alpha+1-n} \right|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi+2\pi k}{n}}} \\
&= \frac{1}{n}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi+2\pi k}{n}(\alpha+1-n)} \\
&= \frac{1}{n}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi(1+2k)\left(\frac{\alpha+1-n}{n}\right)} \\
&= \frac{1}{n}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi(1+2k)\left(\frac{\alpha+1}{n}-1\right)} \\
&= \frac{1}{n}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi(1+2k)\frac{\alpha+1}{n}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\pi(1+2k)} \\
&= -\frac{1}{n}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi(1+2k)\frac{\alpha+1}{n}}
\end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בעובדה כי $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi m} = -1$ כאשר $m \in \mathbb{Z}$ אי־זוגי. על המעגל הקטן מתקיים:

$$|z^n + 1| \geq 1 - |z|^n = 1 - \varepsilon^n$$

(עבור $\varepsilon \to 0$), לכן:

$$\left| \frac{z^{\alpha}}{z^n + 1} \right| = \frac{\varepsilon^{\alpha}}{|z^n + 1|} \leq \frac{\varepsilon^{\alpha}}{1 - \varepsilon^n}$$

ומכאן:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{z^{\alpha}}{z^n + 1} \mathrm{d}z \right| &\leq \max_{\gamma_\varepsilon} \left| \frac{z^{\alpha}}{z^n + 1} \right| \cdot L(\gamma_\varepsilon) \\
&= \frac{\varepsilon^{\alpha}}{1 - \varepsilon^n} \cdot 2\pi\varepsilon \\
&= 2\pi \frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{1 - \varepsilon^n} \\
&\to 0
\end{aligned}$$

כאשר $\varepsilon \to 0$, כי לפי הנתון $\alpha > -1$ ולכן $\alpha + 1 > 0$. על המעגל הגדול מתקיים:

$$|z^n + 1| \geq |z^n| - 1 = R^n - 1$$

(עבור $R \to \infty$), לכן:

$$\left| \frac{z^{\alpha}}{z^n + 1} \right| = \frac{R^{\alpha}}{|z^n + 1|} \leq \frac{R^{\alpha}}{R^n - 1}$$

ומכאן:

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Gamma_R}\frac{z^\alpha}{z^n+1}\mathrm{d}z\right| &\le \max_{\Gamma_R}\left|\frac{z^\alpha}{z^n+1}\right|\cdot L\left(\Gamma_R\right)\\ &=\frac{R^\alpha}{R^n-1}\cdot 2\pi R\\ &=2\pi\frac{R^{\alpha+1}}{1-R^n}\\ &\to 0\end{aligned}$$

כאשר $R\to\infty$, כי לפי הנתון $\alpha<n-1$ ולכן $\alpha+1<n$. לבסוף נשים לב כי:

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0,R\to\infty}\left(\int_{I_+}+\int_{I_-}\right)\frac{z^\alpha}{z^n+1}\mathrm{d}z &= \lim_{\varepsilon\to 0,R\to\infty}\left(\int_{[\varepsilon,R]}\frac{z^\alpha}{z^n+1}\mathrm{d}z+\int_{[R,\varepsilon]}\frac{z^\alpha}{z^n+1}\mathrm{d}z\right)\\ &=\int_0^\infty\frac{\left(r\,\mathrm{e}^{0\,\mathrm{i}}\right)^\alpha}{\left(r\,\mathrm{e}^{0\,\mathrm{i}}\right)^n+1}\mathrm{d}r+\int_\infty^0\frac{\left(r\,\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi}\right)^\alpha}{\left(r\,\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi}\right)^n+1}\mathrm{d}r\\ &=\int_0^\infty\frac{x^\alpha}{x^n+1}\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi\alpha}\int_0^\infty\frac{x^\alpha}{x^n\,\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi n}+1}\mathrm{d}x\\ &=\left(1-\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi\alpha}\right)\int_0^\infty\frac{x^\alpha}{x^n+1}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

לכן:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\frac{x^\alpha}{x^n+1}\mathrm{d}x &= \frac{1}{1-\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi\alpha}}\cdot 2\pi\,\mathrm{i}\sum_{k=0}^{n-1}\operatorname*{Res}_{z=z_k}\left(\frac{z^\alpha}{z^n+1}\right)\\ &=\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi\alpha}}\sum_{k=0}^{n-1}\left[-\frac{1}{n}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi(1+2k)\frac{\alpha+1}{n}}\right]\\ &=-\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{n}\frac{1}{1-\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi\alpha}}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi(1+2k)\frac{\alpha+1}{n}}\\ &=-\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{n}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi\frac{\alpha+1}{n}}}{1-\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi\alpha}}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi k\frac{\alpha+1}{n}}\\ &=-\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{n}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi\frac{\alpha+1}{n}}}{1-\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi\alpha}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi\frac{\alpha+1}{n}}\right)^k\\ &=-\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{n}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi\frac{\alpha+1}{n}}}{1-\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi\alpha}}\frac{1-\left(\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi\frac{\alpha+1}{n}}\right)^n}{1-\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi\frac{\alpha+1}{n}}}\\ &=-\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{n}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi\frac{\alpha+1}{n}}}{1-\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi\alpha}}\frac{1-\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi(\alpha+1)}}{1-\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi\frac{\alpha+1}{n}}}\\ &=-\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{n}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi\frac{\alpha+1}{n}}}{1-\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi\alpha}}\frac{1-\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi\alpha}\,\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi}}{1-\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi\frac{\alpha+1}{n}}}\\ &=-\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{n}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi\frac{\alpha+1}{n}}}{1-\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi\frac{\alpha+1}{n}}}\\ &=-\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{n}\frac{1}{\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\pi\frac{\alpha+1}{n}}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi\frac{\alpha+1}{n}}}\\ &=\frac{\pi}{n}\frac{2\,\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi\frac{\alpha+1}{n}}-\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\pi\frac{\alpha+1}{n}}}\\ &=\frac{\pi}{n\sin\left(\pi\frac{\alpha+1}{n}\right)}\end{aligned}$$

$\square$

אינטגרל מס' 4

האינטגרל הוא:

$$\int_0^\infty \frac{\log\left(1+x^2\right)}{x^{1+\alpha}}\mathrm{d}x, \qquad 0<\alpha<2$$

נבצע החלפת משתנים:

$$y=x^2 \Longrightarrow x=y^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow \mathrm{d}x=\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}y$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\log\left(1+x^2\right)}{x^{1+\alpha}}\mathrm{d}x &= \int_0^\infty \frac{\log\left(1+y\right)}{y^{\frac{1+\alpha}{2}}}\cdot\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\log\left(1+y\right)}{y^{1+\frac{\alpha}{2}}}\mathrm{d}y\end{aligned}$$

בנוסף נבצע אינטגרציה בחלקים:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\log\left(1+y\right)}{y^{1+\frac{\alpha}{2}}}\mathrm{d}y &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \log\left(1+y\right)\left(\frac{y^{-\frac{\alpha}{2}}}{-\frac{\alpha}{2}}\right)'\mathrm{d}y \\ &= -\frac{1}{\alpha}\int_0^\infty \log\left(1+y\right)\left(y^{-\frac{\alpha}{2}}\right)'\mathrm{d}y \\ &= -\frac{1}{\alpha}\left[\log\left(1+y\right)y^{-\frac{\alpha}{2}}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{y^{-\frac{\alpha}{2}}}{1+y}\mathrm{d}y\right]\end{aligned}$$

נשים לב כי $0<\frac{\alpha}{2}<1$ ולכן:

$$\lim_{y\to\infty}\frac{\log\left(1+y\right)}{y^{\frac{\alpha}{2}}} \le \lim_{y\to\infty}\frac{\log\left(2y\right)}{y^{\frac{\alpha}{2}}} = \lim_{y\to\infty}\frac{\log 2+\log y}{y^{\frac{\alpha}{2}}}=0$$

כאשר השתמשנו בגבול הידוע $\frac{\log R}{R^m}=0$ עבור $m>0$, ובדומה:

$$\lim_{y\to0}\frac{\log\left(1+y\right)}{y^{\frac{\alpha}{2}}} = \lim_{y\to0}\frac{\frac{1}{1+y}}{\frac{\alpha}{2}y^{\frac{\alpha}{2}-1}} = \frac{2}{\alpha}\lim_{y\to0}\frac{y^{1-\frac{\alpha}{2}}}{1+y}=0$$

כאשר השתמשנו בכלל לופיטל. מכאן:

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\log\left(1+y\right)}{y^{1+\frac{\alpha}{2}}}\mathrm{d}y = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty \frac{1}{\left(1+y\right)y^{\frac{\alpha}{2}}}\mathrm{d}y$$

לחישוב האינטגרל נשתמש כרגיל במסילת "חור המנעול":

$$\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{R\to0}\oint_\gamma \frac{1}{\left(1+z\right)z^{\frac{\alpha}{2}}}\mathrm{d}z$$

על המעגל הקטן, כאשר $\varepsilon\to0$:

$$|1+z|\ge1-\varepsilon \Longrightarrow \left|\frac{1}{\left(1+z\right)z^{\frac{\alpha}{2}}}\right| = \frac{1}{|1+z|\,|z|^{\frac{\alpha}{2}}} \le \frac{1}{\left(1-\varepsilon\right)\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}}$$

לכן:

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to0}\left|\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{1}{\left(1+z\right)z^{\frac{\alpha}{2}}}\mathrm{d}z\right| &\le \lim_{\varepsilon\to0}\max_{\gamma_\varepsilon}\left|\frac{1}{\left(1+z\right)z^{\frac{\alpha}{2}}}\right|\cdot L\left(\gamma_\varepsilon\right) \\ &= \lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\left(1-\varepsilon\right)\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}}\cdot2\pi\varepsilon \\ &= 2\pi\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\varepsilon^{1-\frac{\alpha}{2}}}{1-\varepsilon} \\ &= 0\end{aligned}$$

על המעגל הגדול, כאשר $R\to\infty$:

$$|1+z|\geq R-1\Longrightarrow\left|\frac{1}{(1+z)\,z^{\frac{\alpha}{2}}}\right|=\frac{1}{|1+R|\,|z|^{\frac{\alpha}{2}}}\leq\frac{1}{(R-1)\,R^{\frac{\alpha}{2}}}$$

לכן:

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\left|\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{1}{(1+z)\,z^{\frac{\alpha}{2}}}\mathrm{d}z\right| &\leq \lim_{R\to\infty}\max_{\Gamma_R}\left|\frac{1}{(1+z)\,z^{\frac{\alpha}{2}}}\right|\cdot L\left(\Gamma_R\right)\\ &=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{(R-1)\,R^{\frac{\alpha}{2}}}\cdot 2\pi R\\ &=2\pi\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R^{\frac{\alpha}{2}}-\frac{1}{R^{1-\frac{\alpha}{2}}}}\\ &=0\end{aligned}$$

על השפה העליונה של קו החתך:

$$\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{R\to0}\int_{I_+}\frac{1}{(1+z)\,z^{\frac{\alpha}{2}}}\mathrm{d}z=\int_0^\infty\frac{1}{(1+x)\,x^{\frac{\alpha}{2}}}\mathrm{d}x$$

על השפה התחתונה נקבל פאזה של $\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}}$:

$$\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{R\to0}\int_{I_-}\frac{1}{(1+z)\,z^{\frac{\alpha}{2}}}\mathrm{d}z=\int_\infty^0\frac{1}{(1+x)\,x^{\frac{\alpha}{2}}\left(\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}}\right)^{\frac{\alpha}{2}}}\mathrm{d}x=-\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\alpha\pi}\int_0^\infty\frac{1}{(1+x)\,x^{\frac{\alpha}{2}}}\mathrm{d}x$$

לבסוף, בתוך תחום האינטגרציה קיים קוטב פשוט אחד, $z=-1$, והשארית בו היא:

$$\operatorname*{Res}_{z=-1}\left[\frac{1}{(1+z)\,z^{\frac{\alpha}{2}}}\right]=\left.\frac{1}{z^{\frac{\alpha}{2}}}\right|_{z=-1}=(-1)^{-\frac{\alpha}{2}}=\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\frac{\alpha}{2}\pi}$$

ומכאן:

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{R\to0}\oint_\gamma\frac{1}{(1+z)\,z^{\frac{\alpha}{2}}}\mathrm{d}z &=\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{R\to0}\left(\int_{I_+}+\int_{I_-}\right)\frac{1}{(1+z)\,z^{\frac{\alpha}{2}}}\mathrm{d}z\\ &=\left(1-\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\alpha\pi}\right)\int_0^\infty\frac{1}{(1+x)\,x^{\frac{\alpha}{2}}}\mathrm{d}x\\ &=2\pi\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\frac{\alpha}{2}\pi}\end{aligned}$$

לכן:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\frac{1}{(1+x)\,x^{\frac{\alpha}{2}}}\mathrm{d}x &=\frac{2\pi\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\frac{\alpha}{2}\pi}}{1-\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\alpha\pi}}\\ &=\pi\frac{2\,\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\alpha}{2}\pi}-\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\frac{\alpha}{2}\pi}}\\ &=\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}\end{aligned}$$

ואם נחזור לאינטגרל המקורי נקבל:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\frac{\log\left(1+x^2\right)}{x^{1+\alpha}}\mathrm{d}x &=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\log\left(1+y\right)}{y^{1+\frac{\alpha}{2}}}\mathrm{d}y\\ &=\frac{1}{\alpha}\int_0^\infty\frac{1}{(1+y)\,y^{\frac{\alpha}{2}}}\mathrm{d}y\\ &=\frac{\pi}{\alpha\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}\end{aligned}$$

$\square$

אינטגרל מס' 5

האינטגרל הוא:

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

גם אינטגרל זה מכיל לוגריתם ($\sqrt{z} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\log z}$) ולכן נשתמש כהרגלנו במסילת "חור המנעול" עם קו חתך ב־$[0,\infty)$. מתקיים:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{R\to\infty}\oint_{\gamma_{\varepsilon,R}} \frac{1}{(z+1)\sqrt{z}}\mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{R\to\infty}\left(\int_{I_+}+\int_{I_-}+\int_{\gamma_\varepsilon}+\int_{\Gamma_R}\right)\frac{1}{(z+1)\sqrt{z}}\mathrm{d}z$$

נשים לב כי הבחירה בענף $\arg z\in(0,2\pi)$ של $\log z$ מקבילה לבחירת הענף $\arg z\in(0,\pi)$ של $\sqrt{z}$, כי:

$$w=\sqrt{z}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\log|z|+\mathrm{i}\arg z)}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\log|z|}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,\mathrm{i}\arg z}\Longrightarrow \arg w=\frac{1}{2}\arg z$$

בפרט, הבחירה בענף זה משמעותה ש־$\sqrt{-1}=\sqrt{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}}=+\,\mathrm{i}$. בתוך המסילה יש קוטב אחד פשוט, $z=-1$. השארית בו היא:

$$\operatorname*{Res}_{z=-1}\left[\frac{1}{(z+1)\sqrt{z}}\right]=\left.\frac{1}{\sqrt{z}}\right|_{z=-1}=\frac{1}{\mathrm{i}}$$

על המעגל הקטן מתקיים כאשר $\varepsilon\to 0$:

$$|z+1|\geq 1-\varepsilon,\qquad \left|\sqrt{z}\right|=\left|\varepsilon^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,\mathrm{i}\,\theta}\right|=\sqrt{\varepsilon}$$

לכן:

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{1}{(z+1)\sqrt{z}}\mathrm{d}z\right| &\leq \lim_{\varepsilon\to 0}\max\left|\frac{1}{(z+1)\sqrt{z}}\right|\cdot L\left(\gamma_\varepsilon\right)\\ &=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{(1-\varepsilon)\sqrt{\varepsilon}}\cdot 2\pi\varepsilon\\ &=2\pi\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1-\varepsilon}\\ &=0\end{aligned}$$

על המעגל הגדול מתקיים כאשר $R\to\infty$:

$$|z+1|\geq R-1\geq\frac{1}{2}R,\qquad \left|\sqrt{z}\right|=\left|R^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,\mathrm{i}\,\theta}\right|=\sqrt{R}$$

לכן:

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\left|\int_{\Gamma_R}\frac{1}{(z+1)\sqrt{z}}\mathrm{d}z\right| &\leq \lim_{R\to\infty}\max\left|\frac{1}{(z+1)\sqrt{z}}\right|\cdot L\left(\Gamma_R\right)\\ &=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{2}R\sqrt{R}}\cdot 2\pi R\\ &=4\pi\lim_{R\to\infty}\frac{1}{\sqrt{R}}\\ &=0\end{aligned}$$

ואנו רואים כי האינטגרלים על שני המעגלים מתאפסים.

על השפה העליונה של קו החתך:

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{R\to\infty}\int_{I_+}\frac{1}{(z+1)\sqrt{z}}\mathrm{d}z &=\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{R\to\infty}\int_{[\varepsilon,R]}\frac{1}{(z+1)\sqrt{z}}\mathrm{d}z\\ &=\int_0^\infty\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

על השפה התחתונה מתקיים $z=x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi-\delta)}$ כאשר $\delta\to0$, לכן:

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{R\to\infty}\int_{I_-}\frac{1}{(z+1)\sqrt{z}}\mathrm{d}z&=\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{R\to\infty}\int_{[R,\varepsilon]}\frac{1}{(z+1)\sqrt{z}}\mathrm{d}z\\&=\int_{\infty}^{0}\frac{1}{\left(x\,\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi}+1\right)\sqrt{x\,\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi}}}\mathrm{d}x\\&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi}\int_{\infty}^{0}\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\mathrm{d}x\\&=\int_{0}^{\infty}\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

ומכאן:

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{R\to\infty}\left(\int_{I_+}+\int_{I_-}+\int_{\gamma_\varepsilon}+\int_{\Gamma_R}\right)\frac{1}{(z+1)\sqrt{z}}\mathrm{d}z&=2\int_{0}^{\infty}\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\mathrm{d}x\\&=\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{R\to\infty}\oint_{\gamma_{\varepsilon,R}}\frac{1}{(z+1)\sqrt{z}}\mathrm{d}z\\&=2\pi\,\mathrm{i}\,\operatorname*{Res}_{z=-1}\left[\frac{1}{(z+1)\sqrt{z}}\right]\\&=2\pi\,\mathrm{i}\cdot\frac{1}{\mathrm{i}}\\&=2\pi\end{aligned}$$

לכן התשובה הסופית תהיה:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\pi$$

□

המסילה: חצי המעגל העליון ללא הראשית

אינטגרל מס' 1

האינטגרל:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(\alpha x)}{x\left(x^2+\beta^2\right)}\mathrm{d}x,\qquad\alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

ראשית נסמן:

$$f(x)=\frac{\sin(\alpha x)}{x\left(x^2+\beta^2\right)}$$

אז מתקיים:

$$f(-x)=\frac{\sin(-\alpha x)}{-x\left((-x)^2+\beta^2\right)}=\frac{\sin(\alpha x)}{x\left(x^2+\beta^2\right)}=f(x)$$

לכן הפונקציה סימטרית ביחס ל־0 ונוכל לרשום:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(\alpha x)}{x\left(x^2+\beta^2\right)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\alpha x)}{x\left(x^2+\beta^2\right)}\mathrm{d}x$$

כמו כן נשים לב כי על הציר הממשי מתקיים:

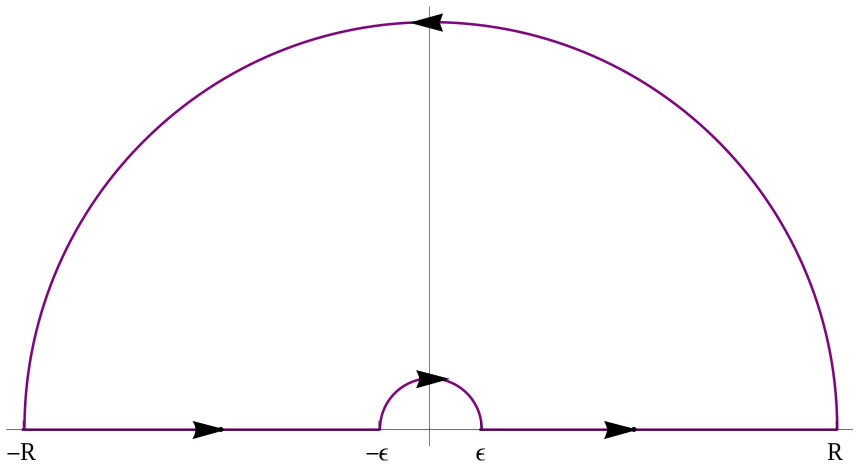
$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha x}}{x\left(x^2+\beta^2\right)}=\frac{\cos(\alpha x)+\mathrm{i}\sin(\alpha x)}{x\left(x^2+\beta^2\right)}=\frac{\cos(\alpha x)}{x\left(x^2+\beta^2\right)}+\mathrm{i}\,\frac{\sin(\alpha x)}{x\left(x^2+\beta^2\right)}$$

לכן נוכל לרשום:

$$\frac{\sin(\alpha x)}{x\left(x^2+\beta^2\right)}=\operatorname{Im}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha x}}{x\left(x^2+\beta^2\right)}\right]$$

כמו כן נניח (לעת עתה) כי $\alpha>0$ ו־$\beta\neq 0$.

לחישוב האינטגרל נשתמש במסילה $\gamma_{\varepsilon,R}$:



המסילה מוגדרת כך:

$$\gamma_{\varepsilon,R}=\gamma_{+}+\Gamma_R+\gamma_{-}+\gamma_{\varepsilon}$$

כאשר $\gamma_{+}=[\varepsilon,R]$ הוא קטע, Γ_R הוא חצי מעגל ברדיוס R סביב הראשית, $\gamma_{-}=[-R,-\varepsilon]$ הוא קטע ו־γ_{ε} הוא חצי מעגל ברדיוס ε סביב הראשית בכיוון השעון. אז מתקיים:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{R\to\infty}\oint_{\gamma_{\varepsilon,R}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha z}}{z\left(z^2+\beta^2\right)}\mathrm{d}z=\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{R\to\infty}\left(\int_{\gamma_{-}}+\int_{\gamma_{+}}+\int_{\gamma_{\varepsilon}}+\int_{\Gamma_R}\right)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha z}}{z\left(z^2+\beta^2\right)}\mathrm{d}z$$

בתוך תחום האינטגרציה, לאינטגרנד קוטב פשוט אחד בלבד: $z=\mathrm{i}\,|\beta|$ (נוכל להשתמש בערך המוחלט כדי לאחד את שני המקרים $\beta>0$ ו־$\beta<0$). השארית בו היא:

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=\mathrm{i}|\beta|}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha z}}{z\left(z^2+\beta^2\right)}\right]&=\operatorname*{Res}_{z=\mathrm{i}|\beta|}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha z}}{z^3+\beta^2 z}\right]\\&=\left.\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha z}}{3z^2+\beta^2}\right|_{z=\mathrm{i}|\beta|}\\&=\frac{\mathrm{e}^{-\alpha|\beta|}}{3\left(\mathrm{i}\,|\beta|\right)^2+|\beta|^2}\\&=-\frac{\mathrm{e}^{-\alpha\beta}}{2\beta^2}\end{aligned}$$

כעת, נתבונן באינטגרל על הקשת הגדולה:

$$\int_{\Gamma_R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha z}}{z\left(z^2+\beta^2\right)}\mathrm{d}z$$

לפי הנחתנו, $\alpha>0$. כמו כן מתקיים:

$$\begin{aligned}\max_{z\in\Gamma_R}\left|\frac{1}{z\left(z^2+\beta^2\right)}\right|&=\max_{\theta\in[0,\pi]}\left|\frac{1}{R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\left(R^2\,\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\theta}+\beta^2\right)}\right|\\&=\max_{\theta\in[0,\pi]}\left|\frac{1}{R\left(R^2\,\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\theta}+\beta^2\right)}\right|\end{aligned}$$

נשים לב כי:

$$\left|R^2 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} + \beta^2\right| \geq \left|R^2 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}\right| - \beta^2 = R^2 - \beta^2$$

לכן כאשר $R \to \infty$ מתקיים לכל θ:

$$\left|\frac{1}{R\left(R^2 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} + \beta^2\right)}\right| \leq \frac{1}{R\left(R^2 - \beta^2\right)} \to 0$$

ומכאן, לפי הלמה של ז'ורדן, האינטגרל על הקשת הגדולה מתאפס. האינטגרל על הקשת הקטנה אינו מתאפס, לכן נחשב אותו במפורש. ראשית נפתח את הפונקציה לטור לורן סביב $z = 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}}{z\left(z^2+\beta^2\right)} &= \frac{1}{z} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z} \cdot \frac{1}{z^2+\beta^2} \\
&= \frac{1}{z} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z} \cdot \frac{1}{\beta^2} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{\mathrm{i}}{\beta}z\right)^2} \\
&= \frac{1}{\beta^2 z} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}\alpha z)^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{i}}{\beta}z\right)^{2n} \\
&= \frac{1}{\beta^2 z} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^m \alpha^m}{m!} z^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^{2n}}{\beta^{2n}} z^{2n} \\
&= \frac{1}{\beta^2 z} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^{m+2n} \alpha^m}{m!\beta^{2n}} z^{m+2n} \\
&= \frac{1}{\beta^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^{m+2n} \alpha^m}{m!\beta^{2n}} z^{m+2n-1} \\
&= \frac{1}{\beta^2} \sum_{m=-1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^{m+1+2n} \alpha^{m+1}}{(m+1)!\beta^{2n}} z^{m+2n} \\
&= \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{1}{z} + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^{m+1+2n} \alpha^{m+1}}{(m+1)!\beta^{2n}} z^{m+2n}\right] \\
&\equiv \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{1}{z} + g(z)\right]
\end{aligned}$$

כאשר $g(z)$ הולומורפית ותחום ההתכנסות הוא $\left|\frac{z}{\beta}\right|^2 < 1$, כלומר $|z| < |\beta|$. כאשר $\varepsilon \to 0$, ברור כי אנו נמצאים בתחום ההתכנסות של הטור, ולכן:

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}}{z\left(z^2+\beta^2\right)} \mathrm{d}z &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{1}{z} + g(z)\right] \mathrm{d}z \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\beta^2} \left[\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1}{z} \mathrm{d}z + \int_{\gamma_\varepsilon} g(z)\,\mathrm{d}z\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\beta^2} \left[\int_{\pi}^{0} \frac{1}{\varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \varepsilon \mathrm{i} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta + 0\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\mathrm{i}}{\beta^2} \int_{\pi}^{0} \mathrm{d}\theta \\
&= -\frac{\mathrm{i}\pi}{\beta^2}
\end{aligned}$$

לבסוף, נשים לב כי:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Im}\left\{\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{R\to\infty}\left[\int_{\gamma_+}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha z}}{z\left(z^2+\beta^2\right)}\mathrm{d}z+\int_{\gamma_+}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha z}}{z\left(z^2+\beta^2\right)}\mathrm{d}z\right]\right\}\\
&=\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{R\to\infty}\left[\int_{\varepsilon}^{R}\frac{\sin(\alpha x)}{x\left(x^2+\beta^2\right)}\mathrm{d}x+\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{\sin(\alpha x)}{x\left(x^2+\beta^2\right)}\mathrm{d}x\right]\\
&=\int_0^\infty\frac{\sin(\alpha x)}{x\left(x^2+\beta^2\right)}\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^0\frac{\sin(\alpha x)}{x\left(x^2+\beta^2\right)}\mathrm{d}x\\
&=\int_{-\infty}^\infty\frac{\sin(\alpha x)}{x\left(x^2+\beta^2\right)}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

מכאן:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty\frac{\sin(\alpha x)}{x\left(x^2+\beta^2\right)}\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty\frac{\sin(\alpha x)}{x\left(x^2+\beta^2\right)}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left\{\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{R\to\infty}\left(\oint_{\gamma_{\varepsilon,R}}-\int_{\gamma_\varepsilon}-\int_{\Gamma_R}\right)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha z}}{z\left(z^2+\beta^2\right)}\mathrm{d}z\right\}\\
&=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left\{2\pi\,\mathrm{i}\left(-\frac{\mathrm{e}^{-\alpha|\beta|}}{2\beta^2}\right)+\frac{\mathrm{i}\,\pi}{\beta^2}\right\}\\
&=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left\{\frac{\pi\,\mathrm{i}}{\beta^2}\left(1-\mathrm{e}^{-\alpha|\beta|}\right)\right\}\\
&=\frac{\pi}{2\beta^2}\left(1-\mathrm{e}^{-\alpha|\beta|}\right)
\end{aligned}$$

נזכור כי הנחנו $\alpha>0$. אם $\alpha<0$ אז קל לראות כי:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty\frac{\sin(-\alpha x)}{x\left(x^2+\beta^2\right)}\mathrm{d}x&=-\int_0^\infty\frac{\sin(\alpha x)}{x\left(x^2+\beta^2\right)}\mathrm{d}x\\
&=-\frac{\pi}{2\beta^2}\left(1-\mathrm{e}^{-\alpha|\beta|}\right),\qquad\alpha<0
\end{aligned}$$

נוכל לאחד את הפתרונות עבור $\alpha>0$ ו־$\alpha<0$ אם נרשום:

$$\int_0^\infty\frac{\sin(\alpha x)}{x\left(x^2+\beta^2\right)}\mathrm{d}x=\operatorname{sign}(\alpha)\,\frac{\pi}{2\beta^2}\left(1-\mathrm{e}^{-|\alpha\beta|}\right)$$

עבור $\alpha=0$ קל לראות כי האינטגרל מתאפס, ותוצאה זו תואמת את הפתרון שקיבלנו. עבור $\beta=0$ (אך $\alpha\neq 0$) ניתן להראות באמצעות מבחני התכנסות של אינטגרלים ממשיים כי האינטגרל מתבדר. $\square$

אינטגרל מס' 2

האינטגרל הוא:

$$\int_0^\infty\frac{\log x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

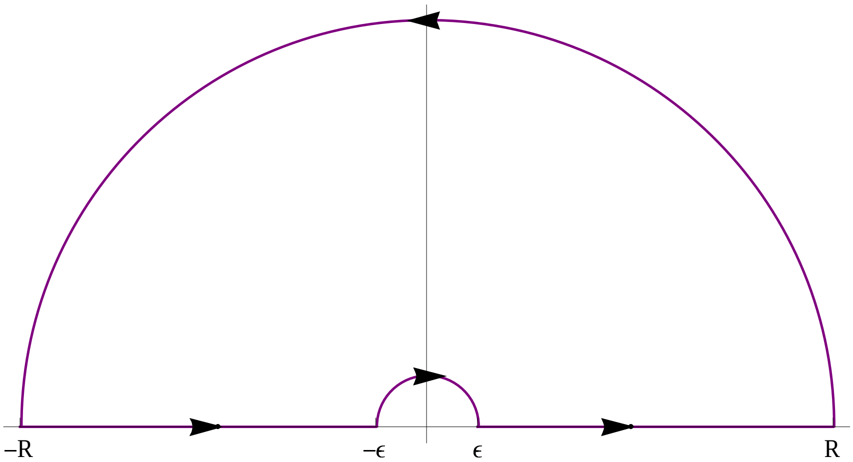
נתבונן בפונקציה המרוכבת:

$$f(z)=\frac{\log z}{1+z^2}$$

ראשית עלינו לבחור ענף של $\log z$. אנו נבחר בענף המוגדר כך:

$$\log z=\log\left(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right)=\log r+\mathrm{i}\,\theta,\qquad\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$$

כלומר, הפונקציה הולומורפית על כל המישור החתוך $\mathbb{C}\backslash[0,-\mathrm{i}\,\infty)$ (המישור בלי הציר המדומה האי־שלילי). על ידי בחירת קו החתך להיות $[0,-\mathrm{i}\,\infty)$ אנו חופשיים לבצע אינטגרציה על הקטע $[0,\infty)$ (ולמעשה על כל הציר הממשי, כפי שנראה מיד) ובלבד ש"נעקוף" את נקודת הענף $z=0$. לכן נבחר במסילה $\gamma_{\varepsilon,R}$:



המסילה מוגדרת כך:

$$\gamma_{\varepsilon,R} = \gamma_+ + \Gamma_R + \gamma_- + \gamma_\varepsilon$$

כאשר $\gamma_- = [\varepsilon, R]$ הוא קטע, Γ_R הוא חצי מעגל ברדיוס R סביב הראשית, $\gamma_- = [-R, -\varepsilon]$ הוא קטע ו־γ_ε הוא חצי מעגל ברדיוס ε סביב הראשית בכיוון השעון. אז מתקיים:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{R\to\infty}\oint_{\gamma_{\varepsilon,R}} \frac{\log z}{1+z^2}\mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{R\to\infty}\left(\int_{\gamma_+} + \int_{\gamma_-} + \int_{\gamma_\varepsilon} + \int_{\Gamma_R}\right)\frac{\log z}{1+z^2}\mathrm{d}z$$

לאינטגרנד שני קטבים פשוטים, $z = \pm\,\mathrm{i}$, ומתוכם רק $z = \mathrm{i}$ נמצא בתוך תחום האינטגרציה. השארית בקוטב זה היא:

$$\operatorname*{Res}_{z=\mathrm{i}}\left(\frac{\log z}{1+z^2}\right) = \left.\frac{\log z}{2z}\right|_{z=\mathrm{i}} = \frac{\log \mathrm{i}}{2\,\mathrm{i}} = \frac{\log \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}}}{2\,\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}}{2\,\mathrm{i}} = \frac{\pi}{4}$$

על המעגל הקטן מתקיים, כאשר $\varepsilon \to 0$ ו־$\theta \in (0,\pi)$:

$$\left|1+z^2\right| \geq 1-\varepsilon^2$$

ולכן:

$$\left|\frac{\log z}{1+z^2}\right| \leq \frac{\left|\log\left(\varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right)\right|}{1-\varepsilon^2} = \frac{\left|\log\varepsilon + \mathrm{i}\,\theta\right|}{1-\varepsilon^2} = \frac{\sqrt{\log^2\varepsilon + \theta^2}}{1-\varepsilon^2} \leq \frac{\sqrt{\log^2\varepsilon + \pi^2}}{1-\varepsilon^2} \leq \frac{\log^2\varepsilon + \pi^2}{1-\varepsilon^2} \leq \frac{2\log^2\varepsilon}{1-\varepsilon^2}$$

(עבור $\varepsilon \to 0$ מתקיים $\log^2\varepsilon \to \infty$). מכאן:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{\log z}{1+z^2}\mathrm{d}z\right| = \lim_{\varepsilon\to 0}\max_{\gamma_\varepsilon}\left|\frac{\log z}{1+z^2}\right|\cdot\pi\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2\log^2\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\pi\varepsilon = 2\pi\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon\log^2\varepsilon}{1-\varepsilon^2} = 0$$

כאשר השתמשנו בגבול הידוע $\varepsilon\log^n\varepsilon \to 0$ לכל n. על המעגל הגדול מתקיים, כאשר $R\to\infty$ ו־$\theta\in(0,\pi)$:

$$\left|1+z^2\right| \geq R^2-1$$

ולכן:

$$\left|\frac{\log z}{1+z^2}\right| \leq \frac{\left|\log\left(R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right)\right|}{R^2-1} = \frac{\sqrt{\log^2 R + \theta^2}}{R^2-1} \leq \frac{\sqrt{\log^2 R + \pi^2}}{R^2-1} \leq \frac{\log^2 R + \pi^2}{R^2-1} \leq \frac{2\log^2 R}{R^2-1}$$

לכן:

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty}\left|\int_{\Gamma_R}\frac{\log z}{1+z^2}\mathrm{d}z\right| &= \lim_{R\to\infty}\max_{\Gamma_R}\left|\frac{\log z}{1+z^2}\right|\cdot\pi R\\
&= \lim_{R\to\infty}\frac{2\log^2 R}{R^2-1}\pi R\\
&= 2\pi\lim_{R\to\infty}\frac{R\log^2 R}{R^2-1}\\
&= 2\pi\lim_{R\to\infty}\frac{\log^2 R}{R-\frac{1}{R}}\\
&\le 2\pi\lim_{R\to\infty}\frac{\log^2 R}{R}\\
&= 0
\end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בגבול הידוע $\frac{\log^n R}{R}\to 0$ לכל n. מכאן, האינטגרלים על שני המעגלים מתאפסים. כעת, מתקיים:

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{R\to\infty}\left(\int_{\gamma_+}\frac{\log z}{1+z^2}\mathrm{d}z+\int_{\gamma_-}\frac{\log z}{1+z^2}\mathrm{d}z\right) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{R\to\infty}\left(\int_{[-R,-\varepsilon]}\frac{\log z}{1+z^2}\mathrm{d}z+\int_{[\varepsilon,R]}\frac{\log z}{1+z^2}\mathrm{d}z\right)\\
&= \int_{-\infty}^{0}\frac{\log x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_0^\infty\frac{\log x}{1+x^2}\mathrm{d}x\\
&= \int_{\infty}^{0}\frac{\log(-x)}{1+(-x)^2}\mathrm{d}(-x)+\int_0^\infty\frac{\log x}{1+x^2}\mathrm{d}x\\
&= \int_0^\infty\frac{\log\left(x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi}\right)}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_0^\infty\frac{\log x}{1+x^2}\mathrm{d}x\\
&= \int_0^\infty\frac{\log x+\mathrm{i}\,\pi}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_0^\infty\frac{\log x}{1+x^2}\mathrm{d}x\\
&= 2\int_0^\infty\frac{\log x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\mathrm{i}\,\pi\int_0^\infty\frac{\log x}{1+x^2}\mathrm{d}x\\
&= 2\int_0^\infty\frac{\log x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\mathrm{i}\,\pi\cdot\frac{\pi}{2}\\
&= 2\int_0^\infty\frac{\log x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{i}\,\pi^2}{2}
\end{aligned}$$

מצד שני:

$$2\int_0^\infty\frac{\log x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{i}\,\pi^2}{2}=\oint_{\gamma_{\varepsilon,R}}\frac{\log z}{1+z^2}\mathrm{d}z=2\pi\,\mathrm{i}\operatorname*{Res}_{z=\mathrm{i}}\left(\frac{\log z}{1+z^2}\right)=2\pi\,\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\mathrm{i}\,\pi^2}{2}$$

ומכאן:

$$\int_0^\infty\frac{\log x}{1+x^2}\mathrm{d}x=0$$

□

אינטגרל מס' 3

האינטגרל הוא:

$$\int_0^\infty\frac{\sin^3 x}{x^3}\mathrm{d}x$$

ראשית נשים לב כי הפונקציה סימטרית ביחס ל־0 ולכן:

$$\int_0^\infty\frac{\sin^3 x}{x^3}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty\frac{\sin^3 x}{x^3}\mathrm{d}x$$

כעת, עלינו לרשום את הסינוס בצורת אקספוננט. נשים לב כי:

$$\begin{aligned}\sin^3 z &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,z}}{2\,\mathrm{i}}\right)^3 \\ &= \frac{\mathrm{i}}{8}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,z}\right)^3 \\ &= \frac{\mathrm{i}}{8}\left(\mathrm{e}^{3\,\mathrm{i}\,z} - 3\,\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,z}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,z} + 3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z}\,\mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\,z} - \mathrm{e}^{-3\,\mathrm{i}\,z}\right) \\ &= \frac{\mathrm{i}}{8}\left(\mathrm{e}^{3\,\mathrm{i}\,z} - \mathrm{e}^{-3\,\mathrm{i}\,z} - 3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z} + 3\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,z}\right) \\ &= \frac{\mathrm{i}}{8}\left(2\,\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,\mathrm{e}^{3\,\mathrm{i}\,z} - 6\,\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(-\mathrm{Im}\,\mathrm{e}^{3\,\mathrm{i}\,z} + 3\,\mathrm{Im}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z}\right) \\ &= \frac{1}{4}\,\mathrm{Im}\left(3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z} - \mathrm{e}^{3\,\mathrm{i}\,z}\right)\end{aligned}$$

לכן, על הישר הממשי:

$$\frac{\sin^3 z}{z^3} = \frac{1}{4}\,\mathrm{Im}\left(\frac{3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z} - \mathrm{e}^{3\,\mathrm{i}\,z}}{z^3}\right) = \frac{1}{4}\,\mathrm{Im}\,f(z)$$

(הערה: באינטגרלים מסוג זה, על הישר הממשי $z^3 \in \mathbb{R}$ ולכן המכנה z^3 נמצא הן בחלק הממשי והן בחלק המדומה של האקספוננט, ואנו יכולים להכניס אותו לתוך ה־Im. כמובן שהשוויון הנ"ל לא מתקיים במקומות אחרים במסלול האינטגרציה בהם $z \notin \mathbb{R}$.)

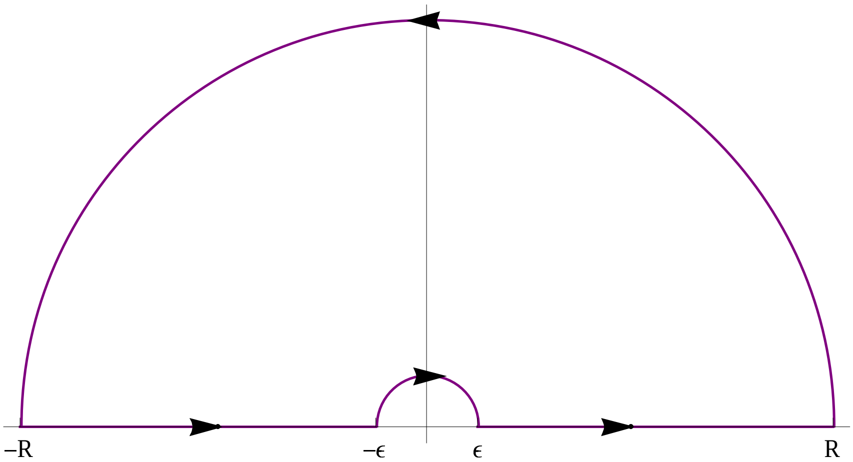
המכנה מתאפס רק כאשר $z = 0$, והמונה אינו מתאפס בנקודה זו, לכן זהו קוטב מסדר 3. כדי לפשט את העניינים ולהקל על חישובים בהמשך, נרצה להקטין את סדר הקוטב. לכן ניצור אפס "מלאכותי" במונה כך:

$$\frac{\sin^3 z}{z^3} = \frac{1}{4}\,\mathrm{Im}\left(\frac{3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z} - \mathrm{e}^{3\,\mathrm{i}\,z} - 2}{z^3}\right) = \frac{1}{4}\,\mathrm{Im}\,g(z)$$

(הוספה של קבוע ממשי לא משפיעה על החלק המדומה). כעת, כאשר $z = 0$ גם המכנה וגם המונה של $g(z)$ מתאפסים. נרשום:

$$\begin{aligned}\frac{3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z} - \mathrm{e}^{3\,\mathrm{i}\,z} - 2}{z^3} &= \frac{1}{z^3}\left[3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{n!}z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n\,\mathrm{i}^n}{n!}z^n - 2\right] \\ &= \frac{1}{z^3}\left[3 + 3\,\mathrm{i}\,z + 3\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{n!}z^n - 1 - 3\,\mathrm{i}\,z - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^n\,\mathrm{i}^n}{n!}z^n - 2\right] \\ &= \frac{1}{z^3}\left[3\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{n!}z^n - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^n\,\mathrm{i}^n}{n!}z^n\right] \\ &= \frac{1}{z^3}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(3 - 3^n)\,\mathrm{i}^n}{n!}z^n \\ &= \sum_{n=-1}^{\infty}\frac{\left(3 - 3^{n+3}\right)\mathrm{i}^{n+3}}{(n+3)!}z^n\end{aligned}$$

ומכאן, הקוטב הוא מסדר 1 (פשוט) בלבד. לחישוב האינטגרל נשתמש במסילה $\gamma_{\varepsilon,R}$, אשר עוקפת את הקוטב:



המסילה מוגדרת כך:

$$\gamma_{\varepsilon,R}=\gamma_{+}+\Gamma_{R}+\gamma_{-}+\gamma_{\varepsilon}$$

כאשר $\gamma_{+}=[\varepsilon,R]$ הוא קטע, Γ_R הוא חצי מעגל ברדיוס R סביב הראשית, $\gamma_{-}=[-R,-\varepsilon]$ הוא קטע ו־γ_ε הוא חצי מעגל ברדיוס ε סביב הראשית בכיוון השעון. אז מתקיים:

$$\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{R\to\infty}\oint_{\gamma_{\varepsilon,R}}\frac{3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z}-\mathrm{e}^{3\,\mathrm{i}\,z}-2}{z^3}\mathrm{d}z=\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{R\to\infty}\left(\int_{\gamma_-}+\int_{\gamma_+}+\int_{\gamma_\varepsilon}+\int_{\Gamma_R}\right)\frac{3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z}-\mathrm{e}^{3\,\mathrm{i}\,z}-2}{z^3}\mathrm{d}z$$

בתוך המסילה אין קטבים, לכן נקבל מיד:

$$\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{R\to\infty}\oint_{\gamma_{\varepsilon,R}}\frac{3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z}-\mathrm{e}^{3\,\mathrm{i}\,z}-2}{z^3}\mathrm{d}z=0$$

על המעגל הקטן, האינטגרל לא מתאפס. הקוטב הוא פשוט ולכן נוכל להשתמש במשפט השארית החלקית. המשפט אומר:

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\gamma_\varepsilon}f(z)\,\mathrm{d}z=\alpha\,\mathrm{i}\operatorname*{Res}_{z=z_0}f(z)$$

כאשר γ_ε היא קשת בזווית α (חיובית אם הכיוון הוא נגד השעון ושלילית אחרת) מתוך מעגל ברדיוס ε סביב קוטב פשוט ב־z_0. במקרה שלנו:

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z}-\mathrm{e}^{3\,\mathrm{i}\,z}-2}{z^3}\mathrm{d}z&=-\pi\,\mathrm{i}\operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z}-\mathrm{e}^{3\,\mathrm{i}\,z}-2}{z^3}\right)\\&=-\pi\,\mathrm{i}\lim_{z=0}\frac{3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z}-\mathrm{e}^{3\,\mathrm{i}\,z}-2}{z^2}\\&=-\pi\,\mathrm{i}\lim_{z=0}\frac{3\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z}-3\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{3\,\mathrm{i}\,z}}{2z}\\&=-\pi\,\mathrm{i}\lim_{z=0}\frac{-3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z}+9\,\mathrm{e}^{3\,\mathrm{i}\,z}}{2}\\&=-\pi\,\mathrm{i}\,\frac{-3+9}{2}\\&=-3\pi\,\mathrm{i}\end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בכלל לופיטל. על המעגל הגדול מתקיים:

$$\left|\frac{3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z}-\mathrm{e}^{3\,\mathrm{i}\,z}-2}{z^3}\right|=\frac{\left|3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z}-\mathrm{e}^{3\,\mathrm{i}\,z}-2\right|}{R^3}\leq\frac{\left|3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z}\right|+\left|\mathrm{e}^{3\,\mathrm{i}\,z}\right|+2}{R^3}=\frac{6}{R^3}$$

לכן:

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\left|\int_{\Gamma_R}\frac{3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z}-\mathrm{e}^{3\,\mathrm{i}\,z}-2}{z^3}\mathrm{d}z\right| &\le \lim_{R\to\infty}\max_{\Gamma_R}\left|\frac{3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z}-\mathrm{e}^{3\,\mathrm{i}\,z}-2}{z^3}\right|\cdot L\left(\Gamma_R\right)\\ &= \lim_{R\to\infty}\frac{6}{R^3}\cdot\pi R\\ &= 6\pi\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R^2}\\ &= 0\end{aligned}$$

והאינטגרל מתאפס. לבסוף נשים לב כי:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{R\to\infty}\left(\int_{\gamma_-}+\int_{\gamma_+}\right)\frac{3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z}-\mathrm{e}^{3\,\mathrm{i}\,z}-2}{z^3}\mathrm{d}z=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}-\mathrm{e}^{3\,\mathrm{i}\,x}-2}{x^3}\mathrm{d}x+\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}-\mathrm{e}^{3\,\mathrm{i}\,x}-2}{x^3}\mathrm{d}x\right)$$

כאשר השארנו את הגבול ב־ε כי האינטגרל הנתון לא מתכנס ב־0; הגורם לאי־ההתכנסות הוא החלק הממשי באינטגרל ולכן זו אינה בעיה מבחינתנו. מתקיים, אם כן:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}-\mathrm{e}^{3\,\mathrm{i}\,x}-2}{x^3}\mathrm{d}x+\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}-\mathrm{e}^{3\,\mathrm{i}\,x}-2}{x^3}\mathrm{d}x\right)-3\pi\,\mathrm{i}=0$$

כאשר $-3\pi\,\mathrm{i}$ הוא האינטגרל על המעגל הקטן, כזכור. ניקח את החלק המדומה, נעבור לגבול ונקבל:

$$\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}-\mathrm{e}^{3\,\mathrm{i}\,x}-2}{x^3}\mathrm{d}x=3\pi$$

ומכאן:

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}-\mathrm{e}^{3\,\mathrm{i}\,x}-2}{x^3}\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{8}\qquad\square$$

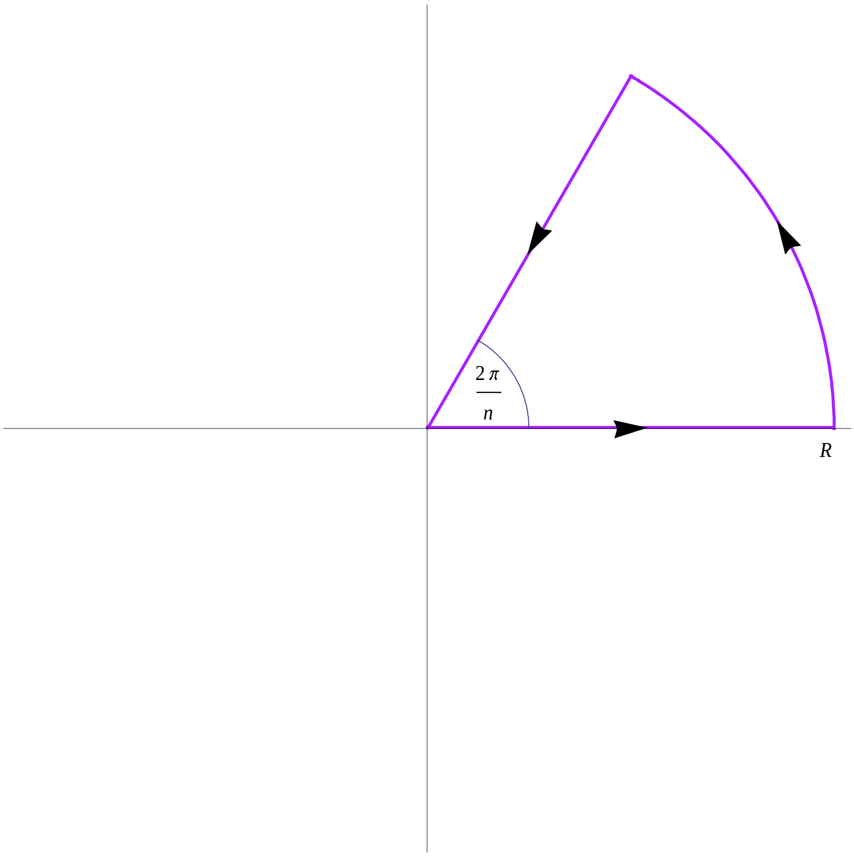
מסילות נוספות

אינטגרל מס' 1 ("משולש פיצה")

האינטגרל הוא:

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x,\qquad n>1$$

לחישוב האינטגרל נשתמש במסילה γ_R:



המסילה מורכבת משלוש מסילות - הקטע $[0,R]$, הקשת C_R והקטע $\left[R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{n}},0\right]$:

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{\gamma_R}\frac{1}{1+z^n}\mathrm{d}z=\lim_{R\to\infty}\left[\left(\int_{[0,R]}+\int_{C_R}+\int_{\left[R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{n}},0\right]}\right)\frac{1}{1+z^n}\mathrm{d}z\right]$$

לפונקציה יש n קטבים פשוטים $z_k=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{n}(1+2k)}$ כאשר $k\in\{0,\dots,n-1\}$. קל לראות כי רק הקוטב $z_0=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{n}}$ נמצא בתוך תחום האינטגרציה. השארית בו היא:

$$\operatorname*{Res}_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{n}}}\left(\frac{1}{1+z^n}\right)=\left.\frac{1}{nz^{n-1}}\right|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{n}}}=\frac{1}{n\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{n}}\right)^{n-1}}=\frac{1}{n}\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\pi\,\frac{n-1}{n}}$$

על הקשת מתקיים $|z|=R$ ולכן:

$$|1+z^n|\geq|1-|z|^n|=|1-R^n|$$

מכאן:

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{C_R}\frac{1}{1+z^n}\mathrm{d}z\right|\leq\lim_{R\to\infty}\frac{\frac{2\pi}{n}R}{|1-R^n|}=\frac{2\pi}{n}\lim_{R\to\infty}\frac{1}{\left|\frac{1}{R}-R^{n-1}\right|}$$

נתון כי $n>1$, לכן $n-1>0$ והאינטגרל על הקשת מתאפס. כמו כן נשים לב כי:

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\int_{\left[R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{n}},0\right]}\frac{1}{1+z^n}\mathrm{d}z&=\left[z=r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{n}}\implies\mathrm{d}z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{n}}\,\mathrm{d}r\right]\\&=\lim_{R\to\infty}\int_R^0\frac{1}{1+r^n\,\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{n}}\,\mathrm{d}r\\&=-\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{n}}\int_0^\infty\frac{1}{1+r^n}\mathrm{d}r\end{aligned}$$

ומכאן:

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty}\left[\left(\int_{[0,R]}+\int_{\left[R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{n}},0\right]}\right)\frac{1}{1+z^n}\mathrm{d}z\right] &= \int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{n}}\int_0^\infty\frac{1}{1+r^n}\mathrm{d}r\\
&=\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{n}}\right)\int_0^\infty\frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x\\
&=\lim_{R\to\infty}\oint_{\gamma_R}\frac{1}{1+z^n}\mathrm{d}z\\
&=2\pi\,\mathrm{i}\cdot\frac{1}{n}\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\pi\,\frac{n-1}{n}}
\end{aligned}$$

לכן:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty\frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x &= \frac{\pi}{n}\frac{2\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\pi\,\frac{n-1}{n}}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{n}}}\\
&=\frac{\pi}{n}\frac{2\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\pi\left(\frac{n-1}{n}+\frac{1}{n}\right)}}{\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\frac{\pi}{n}}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{n}}}\\
&=\frac{\pi}{n}\frac{2\,\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{n}}-\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\frac{\pi}{n}}}\\
&=\frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}
\end{aligned}$$

$\square$

אינטגרל מס' 2 (עצם)

האינטגרל הוא:

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x\,(1-x)}}\mathrm{d}x$$

נתבונן בפונקציה $\phi\,(z)=\frac{1-z}{z}$. זוהי העתקת מביוס המקיימת:

$$\phi\,(0)=\infty,\qquad \phi\left(\frac{1}{2}\right)=1,\qquad \phi\,(1)=0$$

מכאן, היא מעבירה את הקטע $[0,1]$ לקטע $[0,\infty]$ ולכן את המישור החתוך $\mathbb{C}\backslash\,[0,1]$ למישור החתוך $\mathbb{C}\backslash\,[0,\infty]$. כמו כן היא הולומורפית ב־$\mathbb{C}\backslash\,[0,1]$. לפונקציה $\sqrt{z}$ קיים ענף הולומורפי בתמונת $\mathbb{C}\backslash\,[0,1]$ דרך $\phi\,(z)$, הלוא היא $\mathbb{C}\backslash\,[0,\infty]$, לכן $\sqrt{\frac{1-z}{z}}$ הולומורפית ב־$\mathbb{C}\backslash\,[0,1]$. מכאן, הפונקציה:

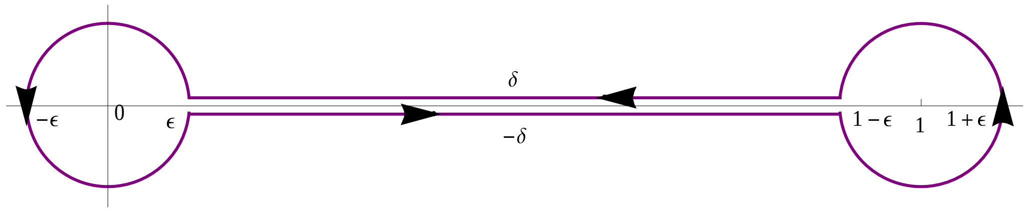
$$f\,(z)=z\sqrt{\frac{1-z}{z}}$$

הולומורפית ב־$\mathbb{C}\backslash\,[0,1]$ (הכפלה ב־z לא משנה שום דבר, כמובן). אך מתקיים:

$$\sqrt{[f\,(z)]^2}=\sqrt{z^2\frac{1-z}{z}}=\sqrt{z\,(1-z)}$$

לכן $f\,(z)$ היא ענף הולומורפי של הפונקציה שבמכנה באינטגרנד שלנו. מכאן אנו רואים כי האינטגרל המסילתי צריך "לעקוף" את החתך $[0,1]$, ולא יכול לעבור דרכו. הנקודות $z=0$ ו־$z=1$ הן נקודות ענף (Branch Points) והקטע $[0,1]$ הוא קו חתך (Branch Cut).

המסילה המתאימה לביצוע אינטגרציה מסוג זה היא מסילת "עצם":



המסילה $\gamma_{\delta,\varepsilon}$ מורכבת מהקטעים:

$$\gamma_{-}=\left[\varepsilon-\mathrm{i}\,\delta,1-\varepsilon-\mathrm{i}\,\delta\right],\qquad\gamma_{-}=\left[\varepsilon+\mathrm{i}\,\delta,1-\varepsilon+\mathrm{i}\,\delta\right]$$

ומשני המעגלים γ_{ε}^{0} ו־γ_{ε}^{1} בעלי מרכז בנקודות $z=0$ ו־$z=1$ בהתאמה, ורדיוס ε. נשים לב כי המעגלים מתחילים ונגמרים בקטעים γ_{+},γ_{-}, וככל ש־δ מתקרב ל־0 כך הם מתקרבים להיות מעגלים מלאים. מתקיים כמובן:

$$\oint_{\gamma_{\delta,\varepsilon}}\frac{1}{\sqrt{z\left(1-z\right)}}\mathrm{d}z=\left(\int_{\gamma_{-}}+\int_{\gamma_{+}}+\int_{\gamma_{\varepsilon}^{0}}+\int_{\gamma_{\varepsilon}^{1}}\right)\frac{1}{\sqrt{z\left(1-z\right)}}\mathrm{d}z$$

נפתח את האינטגרנד בטור לורן סביב $z=\infty$ (זה שקול לפיתוח $f\left(w=\frac{1}{z}\right)$ סביב $w=0$):

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{z\left(1-z\right)}}&=\frac{1}{\sqrt{z-z^{2}}}\\&=\pm\frac{1}{z\sqrt{\frac{1}{z}-1}}\\&=\pm\frac{\mathrm{i}}{z}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{z}}}\\&=\pm\frac{\mathrm{i}}{z}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-\frac{1}{2}}\\&=\pm\frac{\mathrm{i}}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\left(-1\right)^{n}z^{-n}\\&=\pm\frac{\mathrm{i}}{z}\sum_{n=-\infty}^{0}\binom{-\frac{1}{2}}{-n}\left(-1\right)^{n}z^{n}\\&=\pm\,\mathrm{i}\sum_{n=-\infty}^{0}\binom{-\frac{1}{2}}{-n}\left(-1\right)^{n}z^{n-1}\\&=\pm\,\mathrm{i}\sum_{n=-\infty}^{-1}\binom{-\frac{1}{2}}{-n-1}\left(-1\right)^{n+1}z^{n}\end{aligned}$$

כאשר הפיתוח תקף עבור $\left|\frac{1}{z}\right|<1$, כלומר $\left|z\right|>1$, וכאשר הבחירה $+$ או $-$ תלויה בבחירת הענף של השורש. השארית ב־∞ היא המקדם של z^{-1}:

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{z\left(1-z\right)}}\right]=\pm\,\mathrm{i}$$

כמו כן נשים לב כי כאשר $\delta\to0$, על המעגל γ_{ε}^{0} מתקיים:

$$\left|z\left(1-z\right)\right|=\left|\varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\left(1-\varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right)\right|=\varepsilon\left|1-\varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right|\geq\varepsilon\left(1-\left|\varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right|\right)=\varepsilon\left(1-\varepsilon\right)$$

לכן:

$$\frac{1}{\sqrt{\left|z\left(1-z\right)\right|}}\leq\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\left(1-\varepsilon\right)}}$$

ונקבל, כאשר $\varepsilon \to 0$:

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_\varepsilon^0} \frac{1}{\sqrt{z(1-z)}}\mathrm{d}z\right| &\le \max_{\gamma_\varepsilon^0}\left|\frac{1}{\sqrt{z(1-z)}}\right| \cdot L\left(\gamma_\varepsilon^0\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}} \cdot 2\pi\varepsilon \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} \\ &\to 0\end{aligned}$$

בדומה, גם על המעגל γ_ε^1 מתקיים ($z = 1 + \varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$):

$$\begin{aligned}|z(1-z)| &= \left|\left(1+\varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right)\left[1-\left(1+\varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right)\right]\right| \\ &= \left|1+\varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right|\left|-\varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right| \\ &= \varepsilon\left|1+\varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right| \\ &\ge \varepsilon\left(1-\left|\varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right|\right) \\ &= \varepsilon(1-\varepsilon)\end{aligned}$$

ולכן האינטגרל על γ_ε^1 מתאפס גם הוא. לבסוף, נשים לב כי ללא תלות בענף המסוים של השורש שבחרנו, ערך הפונקציה בשפה התחתונה של הקטע $[0,1]$ יהיה מינוס הערך על השפה העליונה, כי כאשר $\arg z$ גדל ב־2π (סיבוב שלם סביב אחת מנקודות הענף), $\arg\sqrt{z}$ גדל ב־π, ונקבל את אותו ערך כפול $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi} = -1$. מצד שני, γ_- הולכת בכיוון הפוך ל־γ_+ ולכן נקבל מינוס נוסף. בסה"כ:

$$\int_{\gamma_-} \frac{1}{\sqrt{z(1-z)}}\mathrm{d}z = \int_{\gamma_+} \frac{1}{\sqrt{z(1-z)}}\mathrm{d}z = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$$

ולכן:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\lim_{\delta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\oint_{\gamma_{\delta,\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{z(1-z)}}\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2}\cdot 2\pi\,\mathrm{i}\cdot(\pm\,\mathrm{i}) \\ &= \pm\pi\end{aligned}$$

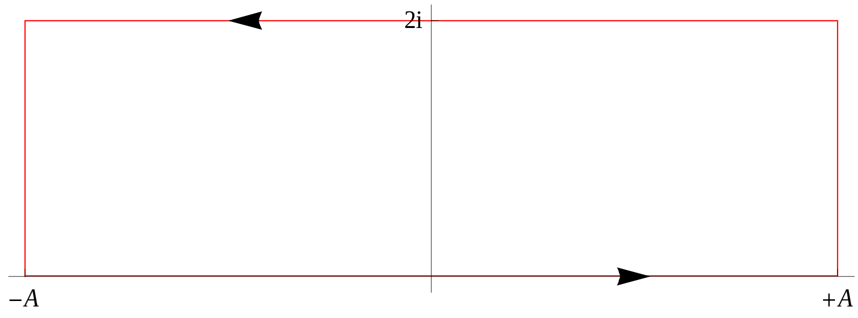
כעת נשים לב כי האינטגרל הממשי הוא חיובי, ולפיכך יש לבחור בענף שמניב תוצאה חיובית. התוצאה הסופית היא, אם כן, π. $\square$

אינטגרל מס' 3 (מלבן)

האינטגרל הוא:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x\omega}}{\cosh(\pi x)}\mathrm{d}x, \qquad \omega \in \mathbb{R}$$

לחישובו נשתמש במסילה הבאה:



המסילה מורכבת מ־4 קטעים:

$$\gamma=[-A,A]+[A,A+2\,\mathrm{i}]+[A+2\,\mathrm{i},-A+2\,\mathrm{i}]+[-A+2\,\mathrm{i},-A]$$

כאשר $A\to\infty$, ומתקיים:

$$\lim_{A\to\infty}\oint_{\gamma}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z\omega}}{\cosh\left(\pi z\right)}\mathrm{d}z=\lim_{A\to\infty}\left(\int_{[-A,A]}+\int_{[A,A+2\,\mathrm{i}]}+\int_{[A+2\,\mathrm{i},-A+2\,\mathrm{i}]}+\int_{[-A+2\,\mathrm{i},-A]}\right)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z\omega}}{\cosh\left(\pi z\right)}\mathrm{d}z$$

המכנה מתאפס כאשר:

$$\begin{aligned}
&\cosh\left(\pi z\right)=0\\
\Rightarrow&\frac{\mathrm{e}^{\pi z}+\mathrm{e}^{-\pi z}}{2}=0\\
\Rightarrow&\mathrm{e}^{\pi z}=-\,\mathrm{e}^{-\pi z}\\
\Rightarrow&\mathrm{e}^{2\pi z}=-1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+2\pi k)}\\
\Rightarrow&2\pi z=\mathrm{i}\left(\pi+2\pi k\right)\\
\Rightarrow&z=\mathrm{i}\left(\frac{1}{2}+k\right)
\end{aligned}$$

לכל $k\in\mathbb{Z}$. נשים לב כי:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\cosh\left(\pi z\right)\right]\Big|_{z=z_k}&=\pi\sinh\left(\pi z\right)\Big|_{z=z_k}\\
&=\pi\sinh\left(\pi\,\mathrm{i}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right)\\
&=\frac{\pi}{2}\left[\mathrm{e}^{\pi\,\mathrm{i}\left(\frac{1}{2}+k\right)}-\mathrm{e}^{-\pi\,\mathrm{i}\left(\frac{1}{2}+k\right)}\right]\\
&=\frac{\pi}{2}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi k}-\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\pi k}\right]\\
&=\frac{\pi}{2}\left[\mathrm{i}\left(-1\right)^{k}-\left(-\,\mathrm{i}\right)\left(-1\right)^{k}\right]\\
&=\left(-1\right)^{k}\pi\,\mathrm{i}\neq0
\end{aligned}$$

כלומר הנגזרת הראשונה של $\cosh\left(\pi z\right)$ אינה מתאפסת, לכן כל אפס הוא מסדר ראשון וכל קוטב הוא פשוט. בתוך תחום האינטגרציה $\{\mathrm{Im}\,z\in[0,2]\}$ יש 2 קטבים, המתאימים ל־$k=0,1$:

$$z_0=\frac{1}{2}\,\mathrm{i},\qquad z_1=\frac{3}{2}\,\mathrm{i}$$

השארית בכל קוטב היא:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_k}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z\omega}}{\cosh\left(\pi z\right)}\right]=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z\omega}}{\pi\sinh\left(\pi z\right)}\Bigg|_{z=z_k}=\frac{\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{2}+k\right)\omega}}{\left(-1\right)^{k}\pi\,\mathrm{i}}$$

וסכום השאריות על שני הקטבים יהיה:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}+\operatorname*{Res}_{z=z_1}=\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\omega}}{\pi\,\mathrm{i}}-\frac{\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\omega}}{\pi\,\mathrm{i}}=\frac{1}{\pi\,\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\omega}-\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\omega}\right)$$

כעת, על הקטע האופקי התחתון $[-A,A]$ מתקיים:

$$\lim_{A\to\infty}\int_{[-A,A]}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z\omega}}{\cosh\left(\pi z\right)}\mathrm{d}z=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x\omega}}{\cosh\left(\pi x\right)}\mathrm{d}x$$

על הקטע האופקי העליון $[A+2\,\mathrm{i},-A+2\,\mathrm{i}]$ מתקיים:

$$\begin{aligned}\lim_{A\to\infty}\int_{[A+2\,\mathrm{i},-A+2\,\mathrm{i}]}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z\omega}}{\cosh\left(\pi z\right)}\mathrm{d}z&=\int_{\infty}^{-\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+2\,\mathrm{i})\omega}}{\cosh\left(\pi x+2\pi\,\mathrm{i}\right)}\mathrm{d}x\\&=\int_{\infty}^{-\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x\omega}\,\mathrm{e}^{-2\omega}}{\cosh\left(\pi x\right)}\mathrm{d}x\\&=-\,\mathrm{e}^{-2\omega}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x\omega}}{\cosh\left(\pi x\right)}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

כי $2\pi\,\mathrm{i}$ הוא המחזור של $\cosh z$ (וזו גם הסיבה שבחרנו במסילה זו מלכתחילה). על הקטע הימני $[A,A+2\,\mathrm{i}]$ נבחר בפרמטריזציה $z=A+\mathrm{i}\,t$ כאשר $t\in[0,2]$, אז:

$$\begin{aligned}\left|\cosh\left(\pi z\right)\right|&=\left|\cosh\left(\pi A+\mathrm{i}\,\pi t\right)\right|\\&=\left|\frac{\mathrm{e}^{\pi A+\mathrm{i}\,\pi t}+\mathrm{e}^{-\pi A-\mathrm{i}\,\pi t}}{2}\right|\\&=\frac{1}{2}\left|\mathrm{e}^{\pi A}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi t}+\mathrm{e}^{-\pi A}\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\pi t}\right|\\&\geq\frac{1}{2}\left|\left|\mathrm{e}^{\pi A}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi t}\right|-\left|\mathrm{e}^{-\pi A}\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\pi t}\right|\right|\\&=\frac{1}{2}\left|\mathrm{e}^{\pi A}-\mathrm{e}^{-\pi A}\right|\end{aligned}$$

וכן:

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z\omega}\right|&=\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega(A+\mathrm{i}\,t)}\right|\\&=\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega A}\,\mathrm{e}^{-\omega t}\right|\\&=\mathrm{e}^{-\omega t}\\&\leq\max\left\{1,\mathrm{e}^{-2\omega}\right\}\\&\equiv C\end{aligned}$$

(אם $\omega<0$ אז $\mathrm{e}^{-2\omega}>1$, בכל מקרה קיבלנו קבוע סופי C) ומכאן:

$$\begin{aligned}\lim_{A\to\infty}\left|\int_{[A,A+2\,\mathrm{i}]}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z\omega}}{\cosh\left(\pi z\right)}\mathrm{d}z\right|&\leq\lim_{A\to\infty}\max_{[A,A+2\,\mathrm{i}]}\left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z\omega}}{\cosh\left(\pi z\right)}\right|\cdot L\left([A,A+2\,\mathrm{i}]\right)\\&=\lim_{A\to\infty}\frac{C}{\frac{1}{2}\left|\mathrm{e}^{\pi A}-\mathrm{e}^{-\pi A}\right|}\cdot 2\\&=4C\lim_{A\to\infty}\frac{1}{\left|\mathrm{e}^{\pi A}-\mathrm{e}^{-\pi A}\right|}\\&=0\end{aligned}$$

כי $\mathrm{e}^{\pi A}\to\infty$. על הקטע השמאלי החישוב הוא אנלוגי לחלוטין, עם ההצבה $A\mapsto -A$. מכאן, האינטגרלים על שני הקטעים האנכיים מתאפסים ונקבל:

$$\begin{aligned}\lim_{A\to\infty}\left(\int_{[-A,A]}+\int_{[A+2\,\mathrm{i},-A+2\,\mathrm{i}]}\right)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z\omega}}{\cosh\left(\pi z\right)}\mathrm{d}z&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x\omega}}{\cosh\left(\pi x\right)}\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{-2\pi\omega}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x\omega}}{\cosh\left(\pi x\right)}\mathrm{d}x\\&=\left(1-\mathrm{e}^{-2\omega}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x\omega}}{\cosh\left(\pi x\right)}\mathrm{d}x\\&=\lim_{A\to\infty}\oint_{\gamma}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z\omega}}{\cosh\left(\pi z\right)}\mathrm{d}z\\&=2\pi\,\mathrm{i}\cdot\frac{1}{\pi\,\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\omega}-\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\omega}\right)\\&=2\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\omega}-\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\omega}\right)\end{aligned}$$

לכן:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x\omega}}{\cosh\left(\pi x\right)}\mathrm{d}x=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2\omega}}\cdot 2\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\omega}-\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\omega}\right)$$
$$=\frac{2\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\omega}-\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\omega}\right)}{\left(1-\mathrm{e}^{-\omega}\right)\left(1+\mathrm{e}^{-\omega}\right)}$$
$$=\frac{2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\omega}\left(1-\mathrm{e}^{-\omega}\right)}{\left(1-\mathrm{e}^{-\omega}\right)\left(1+\mathrm{e}^{-\omega}\right)}$$
$$=\frac{2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\omega}}{1+\mathrm{e}^{-\omega}}$$
$$=\frac{2}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\omega}+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\omega}}$$
$$=\frac{1}{\cosh\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

□

אינטגרל מס' 4 (מלבן עם "שקעים")

האינטגרל הוא:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\left(ax\right)}{\sinh x}\mathrm{d}x,\qquad a\in\mathbb{R}$$

ראשית, נשים לב כי:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\left(ax\right)}{\sinh x}\mathrm{d}x=\int_{0}^{-\infty}\frac{\sin\left(-ax\right)}{\sinh\left(-x\right)}\mathrm{d}\left(-x\right)=\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin\left(ax\right)}{\sinh x}\mathrm{d}x$$

(או פשוט נבחין כי הפונקציה סימטרית סביב $x=0$) ולכן נוכל לרשום:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\left(ax\right)}{\sinh x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\left(ax\right)}{\sinh x}\mathrm{d}x$$

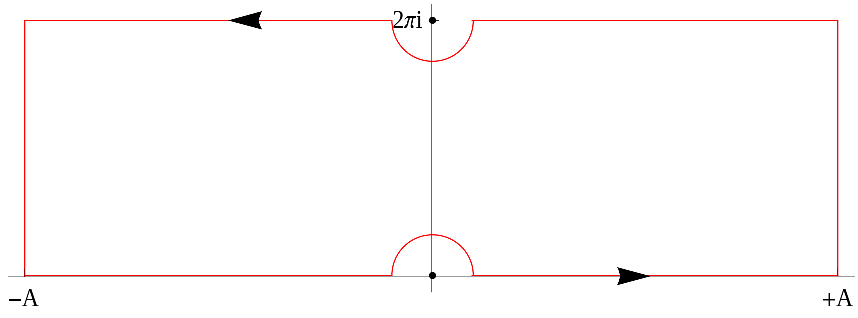
כמו כן, עבור x ממשי מתקיים:

$$\frac{\sin\left(ax\right)}{\sinh x}=\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,az}}{\sinh z}\right)$$

המכנה מתאפס כאשר:

$$\sinh z=0\Longrightarrow\frac{\mathrm{e}^{z}-\mathrm{e}^{-z}}{2}=0\Longrightarrow\mathrm{e}^{z}=\mathrm{e}^{-z}\Longrightarrow\mathrm{e}^{2z}=1=\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi k}\Longrightarrow 2z=2\,\mathrm{i}\,\pi k\Longrightarrow z=\mathrm{i}\,\pi k$$

לכל $k\in\mathbb{Z}$. נקודות אלה יהיו קטבים משום ש-$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,az}\neq 0$ תמיד. אנו רוצים לנצל את המחזור $2\pi\,\mathrm{i}$ של $\sinh z$ ולהשתמש במסילה מלבנית, כמו באינטגרל הקודם, אך הפעם שני קטבים ($z=0$ ו-$z=2\pi\,\mathrm{i}$) יהיו על המסילה. נפתור בעיה זו באמצעות יצירת "שקעים" על המסילה:



המסילה שלנו מורכבת הפעם מ־6 קטעים ושתי קשתות:

$$\begin{aligned}\gamma = [-A,-\varepsilon] + \gamma_\varepsilon + [\varepsilon, A] + [A, A+2\pi\,\mathrm{i}] + [A+2\pi\,\mathrm{i}, \varepsilon+2\pi\,\mathrm{i}] + \\ +\Gamma_\varepsilon + [-\varepsilon+2\pi\,\mathrm{i}, -A+2\pi\,\mathrm{i}] + [-A+2\pi\,\mathrm{i}, -A]\end{aligned}$$

כאשר γ_ε הוא חצי מעגל ברדיוס ε מסביב ל־$z=0$ ו־Γ_ε הוא חצי מעגל ברדיוס ε מסביב ל־$z = 2\pi\,\mathrm{i}$, וכאשר $A\to\infty$ ו־$\varepsilon \to 0$. בתוך תחום האינטגרציה קיים קוטב פשוט יחיד $z_1 = \mathrm{i}\,\pi$, והשארית בו היא:

$$\operatorname*{Res}_{z=\mathrm{i}\,\pi}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,az}}{\sinh z}\right) = \left.\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,az}}{\cosh z}\right|_{z=\mathrm{i}\,\pi} = \frac{\mathrm{e}^{-\pi a}}{\cosh(\mathrm{i}\,\pi)} = \frac{\mathrm{e}^{-\pi a}}{\cos\pi} = -\,\mathrm{e}^{-\pi a}$$

על הקטע הימני $[A, A+2\pi\,\mathrm{i}]$ נבחר בפרמטריזציה $z = A+\mathrm{i}\,t$ כאשר $t\in[0,2\pi]$, אז:

$$\begin{aligned}|\sinh z| &= |\sinh(A+\mathrm{i}\,t)| \\ &= \left|\frac{\mathrm{e}^{A+\mathrm{i}\,t} - \mathrm{e}^{-A-\mathrm{i}\,t}}{2}\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\mathrm{e}^{A}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} - \mathrm{e}^{-A}\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,t}\right| \\ &\ge \frac{1}{2}\left|\left|\mathrm{e}^{A}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}\right| - \left|\mathrm{e}^{-A}\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,t}\right|\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\mathrm{e}^{A} - \mathrm{e}^{-A}\right|\end{aligned}$$

וכן:

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,az}\right| &= \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,a(A+\mathrm{i}\,t)}\right| \\ &= \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,aA}\,\mathrm{e}^{-at}\right| \\ &= \mathrm{e}^{-at} \\ &\le \max\left\{1, \mathrm{e}^{-2a}\right\} \\ &\equiv C\end{aligned}$$

(אם $a<0$ אז $\mathrm{e}^{-2a} > 1$, בכל מקרה קיבלנו קבוע סופי C) ומכאן:

$$\begin{aligned}\lim_{A\to\infty}\left|\int_{[A,A+2\pi\,\mathrm{i}]}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,az}}{\sinh z}\mathrm{d}z\right| &\le \lim_{A\to\infty}\max_{[A,A+2\pi\,\mathrm{i}]}\left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,az}}{\sinh z}\right|\cdot L\left([A,A+2\pi\,\mathrm{i}]\right) \\ &= \lim_{A\to\infty}\frac{C}{\frac{1}{2}\left|\mathrm{e}^{A}-\mathrm{e}^{-A}\right|}\cdot 2\pi \\ &= 4C\lim_{A\to\infty}\frac{1}{\left|\mathrm{e}^{A}-\mathrm{e}^{-A}\right|} \\ &= 0\end{aligned}$$

כי $\mathrm{e}^{A}\to\infty$. על הקטע השמאלי החישוב הוא אנלוגי לחלוטין, עם ההצבה $A\mapsto -A$. מכאן, האינטגרלים על שני הקטעים האנכיים מתאפסים.

לחישוב האינטגרל על הקשת התחתונה, נפתח את הפונקציה שלנו בטור לורן סביב $z=0$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,az}}{\sinh z} &= \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}\,az)^n}{n!}}{\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!}} \\ &= \frac{1+\mathrm{i}\,az+\dots}{z+\frac{z^3}{3!}+\dots} \\ &= \frac{1}{z}\left(\frac{1+\mathrm{i}\,az+\dots}{1+\frac{z^2}{3!}+\dots}\right) \\ &= \frac{1}{z}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n\right) \\ &= \frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^{n-1} \\ &= \frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1} z^{n} \\ &\equiv \frac{1}{z}+g(z)\end{aligned}$$

כאשר $g(z)$ היא פונקציה הולומורפית ו־a_n הם מקדמי פיתוח טיילור של הפונקציה $\frac{1+\mathrm{i}\,az+\dots}{1+\frac{z^2}{3!}+\dots}$ (ניתן למצוא אותם, אך אין צורך בכך למטרתנו). מכך שעבור $z=0$ ערך הפונקציה הוא 1 אנו רואים כי $a_0=1$ ולכן ניתן להפריד את פיתוח טיילור ל־$1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n$, כפי שאכן עשינו. מכאן:

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,az}}{\sinh z}\mathrm{d}z &= \lim_{\varepsilon\to0}\int_{\gamma_\varepsilon}\left[\frac{1}{z}+g(z)\right]\mathrm{d}z \\ &= \lim_{\varepsilon\to0}\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{1}{z}\mathrm{d}z+\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\gamma_\varepsilon}g(z)\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

נשים לב כי $g(z)$ הולומורפית ב־$z=0$ ולכן חסומה שם: $|g(z)|\le C$ עבור $C\ge0$ כלשהו. מכאן:

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left|\int_{\gamma_\varepsilon}g(z)\,\mathrm{d}z\right|\le\lim_{\varepsilon\to0}\max_{\gamma_\varepsilon}|g(z)|\cdot L(\gamma_\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to0}C\cdot\pi\varepsilon=0$$

והאינטגרל הימני מתאפס. לגבי האינטגרל השמאלי, ניתן לחשב אותו במפורש:

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{1}{z}\mathrm{d}z=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\pi}^{0}\frac{1}{\varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}}\,\mathrm{i}\,\varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\,\mathrm{d}\theta=\mathrm{i}\int_{\pi}^{0}\mathrm{d}\theta=-\mathrm{i}\,\pi$$

ומכאן:

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,az}}{\sinh z}\mathrm{d}z=-\mathrm{i}\,\pi$$

לחישוב האינטגרל על הקשת העליונה, נפתח את הפונקציה שלנו בטור לורן סביב $z=2\pi\,\mathrm{i}$. נסמן $y=z-2\pi\,\mathrm{i}$, אז פיתוח זה שקול לפיתוח הפונקציה $f(y)$ סביב $y=0$:

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,az}}{\sinh z}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,a(y+2\pi\,\mathrm{i})}}{\sinh(y+2\pi\,\mathrm{i})}=\mathrm{e}^{-2\pi a}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,ay}}{\sinh y}=\mathrm{e}^{-2\pi a}\left[\frac{1}{y}+g(y)\right]=\mathrm{e}^{-2\pi a}\left[\frac{1}{z-2\pi\,\mathrm{i}}+g(z-2\pi\,\mathrm{i})\right]$$

מכאן, עם הפרמטריזציה $z=2\pi\,\mathrm{i}+\varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ על הקשת Γ_ε:

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,az}}{\sinh z}\mathrm{d}z &= \lim_{\varepsilon\to0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\mathrm{e}^{-2\pi a}\left[\frac{1}{z-2\pi\,\mathrm{i}}+g\left(z-2\pi\,\mathrm{i}\right)\right]\mathrm{d}z\\
&= \mathrm{e}^{-2\pi a}\left[\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{1}{z-2\pi\,\mathrm{i}}\mathrm{d}z+\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\Gamma_R}g\left(z-2\pi\,\mathrm{i}\right)\mathrm{d}z\right]\\
&= \mathrm{e}^{-2\pi a}\lim_{\varepsilon\to0}\int_0^{\pi}\frac{1}{\varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}}\,\mathrm{i}\,\varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\,\mathrm{d}\theta\\
&= \mathrm{e}^{-2\pi a}\,\mathrm{i}\int_{2\pi}^{\pi}\mathrm{d}\theta\\
&= -\,\mathrm{e}^{-2\pi a}\,\mathrm{i}\,\pi
\end{aligned}$$

כאשר שוב האינטגרל על $g\left(z-2\pi\,\mathrm{i}\right)$ נפל מפני שהיא אנליטית ב־$z=2\pi\,\mathrm{i}$, ונשים לב כי הקשת היא החצי התחתון של מעגל שנע עם כיוון השעון ולכן הארגומנט שלה נע מ־2π ל־π. מכאן:

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\Gamma_R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,az}}{\sinh z}\mathrm{d}z=-\,\mathrm{e}^{-2\pi a}\,\mathrm{i}\,\pi$$

ראינו כי האינטגרל מתאפס על שני הקטעים האנכיים, וחישבנו את ערכו על שתי הקשתות. נותר להבחין כי על שני הקטעים התחתונים:

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{A\to\infty}\left(\int_{[-A,-\varepsilon]}+\int_{[\varepsilon,A]}\right)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,az}}{\sinh z}\mathrm{d}z &= \lim_{\varepsilon\to0}\lim_{A\to\infty}\left(\int_{-A}^{-\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,ax}}{\sinh x}\mathrm{d}x+\int_{\varepsilon}^{A}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,ax}}{\sinh x}\mathrm{d}x\right)\\
&= \lim_{\varepsilon\to0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,ax}}{\sinh x}\mathrm{d}x+\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,ax}}{\sinh x}\mathrm{d}x\right)
\end{aligned}$$

כאשר השארנו לעת עתה את הגבול על ε משום האינטגרלים מתבדרים ב־0 (או ליתר דיוק, החלק הממשי שלהם מתבדר - נזכור כי אנו לוקחים רק את החלק המדומה, כך שהכול מסתדר בסוף). על שני הקטעים העליונים:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{A\to\infty}\left(\int_{[A+2\pi\,\mathrm{i},\varepsilon+2\pi\,\mathrm{i}]}+\int_{[-\varepsilon+2\pi\,\mathrm{i},-A+2\pi\,\mathrm{i}]}\right)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,az}}{\sinh z}\mathrm{d}z\\
&=\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{A\to\infty}\left(\int_{A+2\pi\,\mathrm{i}}^{\varepsilon+2\pi\,\mathrm{i}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,ax}}{\sinh x}\mathrm{d}x+\int_{-\varepsilon+2\pi\,\mathrm{i}}^{-A+2\pi\,\mathrm{i}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,ax}}{\sinh x}\mathrm{d}x\right)\\
&=\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{A\to\infty}\left(\int_{A}^{\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,a(x+2\pi\,\mathrm{i})}}{\sinh\left(x+2\pi\,\mathrm{i}\right)}\mathrm{d}x+\int_{-\varepsilon}^{-A}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,a(x+2\pi\,\mathrm{i})}}{\sinh\left(x+2\pi\,\mathrm{i}\right)}\mathrm{d}x\right)\\
&=\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{A\to\infty}\left(\int_{A}^{\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,ax}\,\mathrm{e}^{-2\pi a}}{\sinh x}\mathrm{d}x+\int_{-\varepsilon}^{-A}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,ax}\,\mathrm{e}^{-2\pi a}}{\sinh x}\mathrm{d}x\right)\\
&=-\,\mathrm{e}^{-2\pi a}\lim_{\varepsilon\to0}\left(\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,ax}}{\sinh x}\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,ax}}{\sinh x}\mathrm{d}x\right)
\end{aligned}$$

כעת אנו יכולים להשתמש במשפט השארית:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,ax}}{\sinh x}\mathrm{d}x+\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,ax}}{\sinh x}\mathrm{d}x\right)-\mathrm{e}^{-2\pi a}\lim_{\varepsilon\to0}\left(\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,ax}}{\sinh x}\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,ax}}{\sinh x}\mathrm{d}x\right)+\\
&-\,\mathrm{i}\,\pi-\mathrm{e}^{-2\pi a}\,\mathrm{i}\,\pi=2\pi\,\mathrm{i}\left(-\,\mathrm{e}^{-\pi a}\right)
\end{aligned}$$

מכאן:

$$\left(1-\mathrm{e}^{-2\pi a}\right)\lim_{\varepsilon\to0}\left(\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,ax}}{\sinh x}\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,ax}}{\sinh x}\mathrm{d}x\right)-\left(1+\mathrm{e}^{-2\pi a}\right)\mathrm{i}\,\pi=-2\pi\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\pi a}$$

ולכן:

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,ax}}{\sinh x}\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,ax}}{\sinh x}\mathrm{d}x\right) &= \frac{\left(1+\mathrm{e}^{-2\pi a}\right)\mathrm{i}\,\pi-2\pi\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\pi a}}{1-\mathrm{e}^{-2\pi a}}\\ &=\mathrm{i}\,\pi\frac{1+\mathrm{e}^{-2\pi a}-2\,\mathrm{e}^{-\pi a}}{1-\mathrm{e}^{-2\pi a}}\\ &=\mathrm{i}\,\pi\frac{\left(1-\mathrm{e}^{-\pi a}\right)^2}{\left(1-\mathrm{e}^{-\pi a}\right)\left(1+\mathrm{e}^{-\pi a}\right)}\\ &=\mathrm{i}\,\pi\frac{1-\mathrm{e}^{-\pi a}}{1+\mathrm{e}^{-\pi a}}\\ &=\mathrm{i}\,\pi\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\pi a}-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\pi a}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\pi a}+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\pi a}}\\ &=\mathrm{i}\,\pi\frac{\sinh\left(\frac{\pi a}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi a}{2}\right)}\\ &=\mathrm{i}\,\pi\tanh\left(\frac{\pi a}{2}\right)\end{aligned}$$

לבסוף ניקח את החלק המדומה ונקבל:

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\left\{\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,ax}}{\sinh x}\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,ax}}{\sinh x}\mathrm{d}x\right)\right\} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\sin(ax)}{\sinh x}\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\sin(ax)}{\sinh x}\mathrm{d}x\right)\\ &=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(ax)}{\sinh x}\mathrm{d}x\\ &=\pi\tanh\left(\frac{\pi a}{2}\right)\end{aligned}$$

לכן:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(ax)}{\sinh x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(ax)}{\sinh x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\tanh\left(\frac{\pi a}{2}\right)$$

$\square$