# פונקציות מרוכבות:
# פתרון מבחן לדוגמה של פרופ' אשר בן ארצי
# (סמסטר א' תשע"א)

גרסה 1.0, אוגוסט 2011

ברק שושני
baraksh@gmail.com | http://baraksh.co.il/

## שאלות

1. חשבו את האינטגרל:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{(x^2+4x+5)^2} \mathrm{d}x, \qquad a>0$$

ופשטו את התוצאה.

2. מצאו העתקה קונפורמית $f$ המעתיקה את הקבוצה:

$$E \equiv \left\{ z = x + \mathrm{i}\, y \middle| y > 0,\ (x-1)^2 + y^2 > 1,\ (x+1)^2 + y^2 > 1 \right\}$$

על הקבוצה:

$$F \equiv \mathbb{B} \setminus [0,1)$$

כאשר $\mathbb{B}$ הוא עיגול היחידה. אפשר לתאר את ההעתקה כהרכבת מספר העתקות קונפורמיות מבלי לחשב את התוצאה הסופית.

3. יהי $a \in \mathbb{C}$ המקיים $\operatorname{Re} a > 1$. הוכיחו שלמשוואה $\mathrm{e}^z - z = a$ יש בדיוק פתרון אחד המקיים $\operatorname{Re} z < 0$.

4. האם קיימת פונקציה $f \not\equiv 0$ הולומורפית על עיגול היחידה ובעלת אינסוף אפסים בו?

5. תהי $f$ פונקציה שלמה. נתון שקיים פולינום $p$ כך ש־$\deg p > 0$ וכך ש־$p \circ f$ פולינום. הוכיחו שגם $f$ פולינום.

# פתרונות

## שאלה 1

חשבו את האינטגרל:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\left(ax\right)}{\left(x^{2}+4x+5\right)^{2}}\mathrm{d}x,\qquad a>0$$

ופשטו את התוצאה.

#### פתרון

המכנה מתאפס כאשר:

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2}=-2\pm\mathrm{i}$$

לפיכך אין לו שורשים ממשיים, והאינטגרנד רציף (וסופי) על כל הישר הממשי. נשים לב כי:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\cos\left(ax\right)}{\left(x^{2}+4x+5\right)^{2}}\right|\mathrm{d}x\leq\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(x^{2}+4x+5\right)^{2}}\mathrm{d}x<\infty$$

ולכן האינטגרל מתכנס (בהחלט). כמו כן מתקיים:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\left(ax\right)}{\left(x^{2}+4x+5\right)^{2}}\mathrm{d}x=\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,az}}{\left(z^{2}+4z+5\right)^{2}}\mathrm{d}x$$

כעת, נתבונן בפונקציה:

$$f\left(z\right)\equiv\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,az}}{\left(z^{2}+4z+5\right)^{2}}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,az}}{\left(\left(z+2+\mathrm{i}\right)\left(z+2-\mathrm{i}\right)\right)^{2}}$$

השורשים $-2\pm\mathrm{i}$ הם כמובן קטבים מסדר 2. נבצע אינטגרציה של $f\left(z\right)$ על המסילה $\gamma$ המורכבת מהקטע $[-R,R]$ ומחצי המעגל העליון ברדיוס $R$, כאשר $R\to\infty$. נשים לב כי רק הקוטב $-2+\mathrm{i}$ נמצא בתוך תחום האינטגרציה. לחישוב השארית בו נשתמש בנוסחה (המתאימה לקטבים מסדר שני בלבד):

$$\underset{z=z_{0}}{\mathrm{Res}}\,f\left(z\right)=\lim_{z\to z_{0}}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\left(z-z_{0}\right)^{2}f\left(z\right)\right]\right\}$$

מכאן:

$$\begin{aligned}\underset{z=-2+\mathrm{i}}{\mathrm{Res}}\,f\left(z\right)&=\lim_{z\to-2+\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\left(z+2-\mathrm{i}\right)^{2}f\left(z\right)\right)\\&=\lim_{z\to-2+\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,az}}{\left(z+2+\mathrm{i}\right)^{2}}\right)\\&=\lim_{z\to-2+\mathrm{i}}\frac{\mathrm{i}\,a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,az}\left(z+2+\mathrm{i}\right)-2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,az}}{\left(z+2+\mathrm{i}\right)^{3}}\\&=\frac{a+1}{4\,\mathrm{i}}\,\mathrm{e}^{-\left(2\,\mathrm{i}+1\right)a}\end{aligned}$$

לפיכך:

$$\begin{aligned}\oint_{\gamma}f\left(z\right)\mathrm{d}z&=2\pi\,\mathrm{i}\cdot\frac{a+1}{4\,\mathrm{i}}\,\mathrm{e}^{-\left(2\,\mathrm{i}+1\right)a}\\&=\frac{a+1}{2}\pi\,\mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\,a}\,\mathrm{e}^{-a}\end{aligned}$$

כעת, עבור אינטגרלים מהצורה:

$$\int g\left(z\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, a z}\, \mathrm{d}z, \qquad a>0$$

אנו יודעים, מהלמה של ז'ורדן, כי האינטגרל על חצי המעגל העליון מתאפס אם מתקיים:

$$\lim_{R\to\infty}\left|g\left(R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right)\right|\to 0$$

ואכן, במקרה שלנו:

$$g\left(z\right)\equiv\frac{1}{\left(z^2+4z+5\right)^2}\xrightarrow[|z|\to\infty]{}0$$

לכן האינטגרל על חצי המעגל מתאפס, ומכאן:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\left(ax\right)}{\left(x^2+4x+5\right)^2}\mathrm{d}x=\mathrm{Re}\left(\frac{a+1}{2}\pi\,\mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\,a}\,\mathrm{e}^{-a}\right)=\frac{a+1}{2}\pi\cos\left(2a\right)\mathrm{e}^{-a} \qquad \square$$

## שאלה 2

מצאו העתקה קונפורמית $f$ המעתיקה את הקבוצה:

$$E\equiv\left\{z=x+\mathrm{i}\,y\middle|y>0,\ \left(x-1\right)^2+y^2>1,\ \left(x+1\right)^2+y^2>1\right\}$$

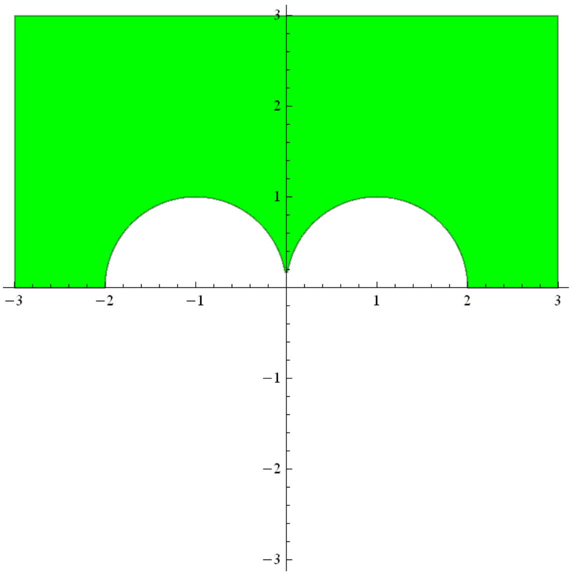
על הקבוצה:

$$F\equiv\mathbb{B}\backslash\left[0,1\right)$$

כאשר $\mathbb{B}$ הוא עיגול היחידה. אפשר לתאר את ההעתקה כהרכבת מספר העתקות קונפורמיות מבלי לחשב את התוצאה הסופית.

### פתרון

הקבוצה $E$ היא חצי המישור העליון ללא שני עיגולי היחידה בעלי מרכזים ב־$z=\pm1$:



ראשית "נהפוך" את הקבוצה באמצעות ההעתקה:

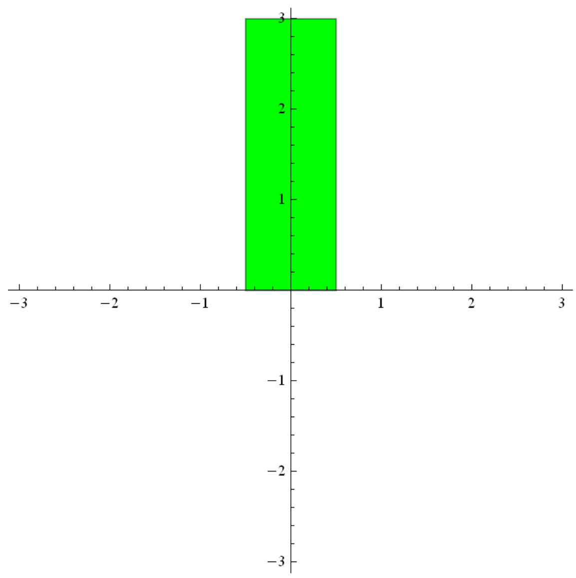
$$\varphi_1(z) \equiv -\frac{1}{z}$$

העתקה זו מקיימת:

$$\varphi_1(0) = \infty, \qquad \varphi_1(1) = -1, \qquad \varphi_1(\infty) = 0$$

לפיכך היא שולחת את הישר הממשי לעצמו. מאחר שההעתקה קונפורמית, מעגלים מאונכים נשארים מאונכים לאחר שמפעילים אותה עליהם. לפיכך המעגל $\left\{(x-1)^2+y^2=1\right\}$, אשר מאונך לישר הממשי בנקודות $z=0$ ו־$z=2$, יהיה מאונך אחרי הפעלת ההעתקה לישר הממשי בנקודות $z=\infty$ ו־$z=\frac{1}{2}$ - כלומר, הוא יעבור לישר $\left\{x=\frac{1}{2}\right\}$. באותה צורה רואים כי המעגל $\left\{(x+1)^2+y^2=1\right\}$ עובר לישר $\left\{x=-\frac{1}{2}\right\}$. נשים לב כי הנקודה $\mathrm{i}\in E$ עוברת לעצמה, ולכן הקבוצה $E$ תעבור להיות בין שני הישרים החדשים, כלומר תעבור למלבן:

$$\varphi_1(E) = \left\{z = x+\mathrm{i}\,y \middle| -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2},\ y>0\right\}$$

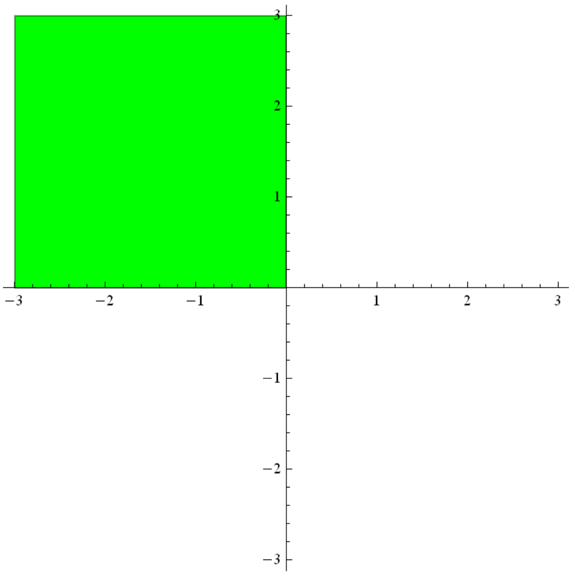



כעת נזיז את המלבן כך שיתחיל מ־$x=0$ ($z\mapsto z+\frac{1}{2}$), נמתח את המלבן פי $2\pi$ ($z\mapsto 2\pi z$), ונסובב אותו ב־90 מעלות סביב הראשית נגד כיוון השעון ($z\mapsto \mathrm{i}\,z$). בסה"כ נקבל את ההעתקה:

$$\varphi_2(z) \equiv 2\pi\,\mathrm{i}\left(z+\frac{1}{2}\right)$$

העתקה זו תעביר את $\varphi_2(E)$ למלבן:

$$(\varphi_2\circ\varphi_1)(E) = \{x<0,\ 0<y<2\pi\}$$




כעת כל שנותר הוא להפעיל את ההעתקה:

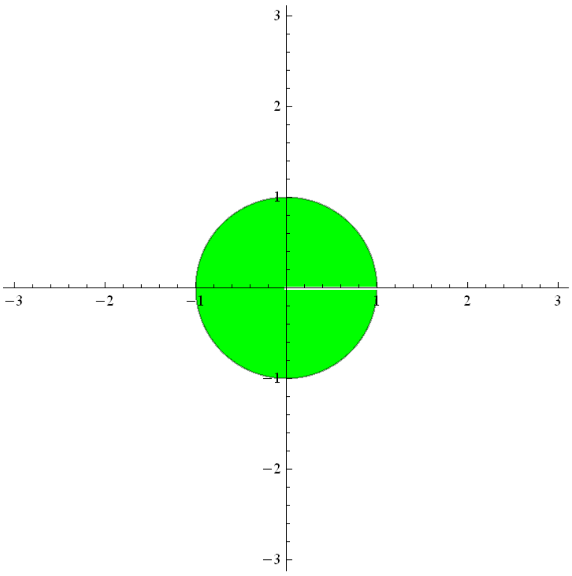
$$\varphi_3(z) \equiv e^z$$

נשים לב כי:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

לכן לאחר ההעתקה אנו נקבל את כל הנקודות שהארגומנט שלהן הוא בין $0$ ל־$2\pi$ (לא כולל) והרדיוס שלהן הוא בין $0$ ל־$1$ (לא כולל):

$$(\varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1)(E) = \mathbb{B} \backslash [0, 1)$$




כנדרש. $\square$

## שאלה 3

יהי $a \in \mathbb{C}$ המקיים $\operatorname{Re} a > 1$. הוכיחו שלמשוואה $\mathrm{e}^z - z = a$ יש בדיוק פתרון אחד המקיים $\operatorname{Re} z < 0$.

#### פתרון

נשתמש **במשפט רושה**: אם $f$ ו־$g$ אנליטיות בתוך ועל מסילה פשוטה וסגורה $\gamma$, ומתקיים $|f(z)| > |g(z)|$ על $\gamma$, אז ל־$f$ ול־$f+g$ אותו מספר אפסים (כולל ריבויים) בתוך $\gamma$.

נגדיר:

$$f(z) \equiv a + z, \qquad g(z) \equiv -\mathrm{e}^z$$

בתור המסילה, ניקח את חצי המעגל השמאלי:

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \equiv [-\mathrm{i} R, \mathrm{i} R] + \left\{ R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \middle| \varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \right\}$$

עלינו להראות כי על המסילה מתקיים:

$$|\mathrm{e}^z| < |a + z|$$

אכן, על $\gamma_1$ מתקיים $\operatorname{Re} z = 0$ ולכן:

$$|\mathrm{e}^z| = \left|\mathrm{e}^{\operatorname{Re} z + \mathrm{i} \operatorname{Im} z}\right| = \mathrm{e}^{\operatorname{Re} z} = 1 < \operatorname{Re} a = \operatorname{Re}(a+z) \le |a+z|$$

ועל $\gamma_2$ מתקיים $\operatorname{Re} z \le 0$ ו־$|z| = R$ ולכן, אם ניקח $R > 1 + |a|$:

$$|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\operatorname{Re} z} \le 1 < R - |a| = |z| - |a| \le |a+z|$$

מאי־שוויון המשולש ההפוך, כנדרש. מכאן, מספר הפתרונות של המשוואה:

$$f(z) + g(z) = a + z - \mathrm{e}^z = 0$$

זהה למספר הפתרונות של המשוואה:

$$f(z) = a + z = 0$$

בתוך המסילה $\gamma$. למשוואה זו יש רק פתרון אחד, $z = -a$, וכאשר $R \to \infty$ אנו רואים כי בחצי המישור השמאלי יש בדיוק פתרון אחד למשוואה $\mathrm{e}^z - z = a$. $\square$

## שאלה 4

האם קיימת פונקציה $f \not\equiv 0$ הולומורפית על עיגול היחידה ובעלת אינסוף אפסים בו?

#### פתרון

אכן, קיימת פונקציה כזאת. נגדיר פונקציה $h$ בצורה הבאה:

$$h(z) \equiv \frac{1-z}{1+z}$$

אז מתקיים:

$$h(-1) = \infty, \qquad h(1) = 0, \qquad h(\mathrm{i}) = \frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$$

לפיכך $h$ מעבירה את מעגל היחידה $\{|z|=1\}$ לישר המדומה $\{\operatorname{Re} z=0\}$. כמו־כן, $h(0)=1$ ולכן עיגול היחידה $\mathbb{B}\equiv\{|z|<1\}$ עובר לחצי המישור הימני $\{\operatorname{Re} z>0\}$. כעת, נגדיר את הפונקציה $f$ המבוקשת כך:

$$f(z)\equiv\sin h(z)$$

מכיוון ש־$h$ הולומורפית על עיגול היחידה, גם $f$ הולומורפית עליו. מתקיים למשל $f(0)=\sin 1\neq 0$ ולכן $f\not\equiv 0$ כנדרש. נשים לב כי $h$ היא הפונקציה ההפוכה של עצמה:

$$h\left(h^{-1}(z)\right)\equiv\frac{1-h^{-1}(z)}{1+h^{-1}(z)}=z\quad\Longrightarrow\quad h^{-1}(z)=\frac{1-z}{1+z}=h(z)$$

נסמן לכל $n\in\mathbb{N}$:

$$z_n\equiv h^{-1}(\pi n)\in\mathbb{B}$$

אז:

$$h(z_n)=\pi n$$

ומכיוון ש־$h$ חד־חד־ערכית, הנקודות $z_n$ שונות זו מזו. לבסוף, מתקיים:

$$f(z_n)=\sin h(z_n)=\sin(\pi n)=0$$

ולכן ל־$f$ אינסוף אפסים בעיגול היחידה, כנדרש. $\square$

## שאלה 5

תהי $f$ פונקציה שלמה. נתון שקיים פולינום $p$ כך ש־$\deg p>0$ וכך ש־$p\circ f$ פולינום. הוכיחו שגם $f$ פולינום.

**פתרון**

נתון כי $f$ שלמה, כלומר היא אנליטית בכל המישור המרוכב פרט, אולי, ל־$\infty$. לפיכך מספיק להוכיח כי אין לה סינגולריות עיקרית ב־$\infty$ (כלומר, יש לה קוטב או היא אנליטית שם), ואז היא בהכרח פולינום. נניח, אם כן, בשלילה כי $\infty$ נקודה סינגולרית עיקרית של $f$.

נתון כי $\deg p>0$, לכן לפולינום $p$ יש לפחות שורש אחד, אותו נסמן ב־$\lambda$. כעת נשתמש **במשפט קסורטי־ויירשטראס**: תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בסביבה נקובה $U$ של $z_0$ ובעלת נקודה סינגולרית עיקרית ב־$z_0$, אז לכל סביבה נקובה $V\subseteq U$ של $z_0$, $f(V)$ צפופה ב־$\mathbb{C}$. מכאן, קיימת סדרה $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש:

$$\lim_{n\to\infty}|z_n|=\infty,\qquad\lim_{n\to\infty}f(z_n)=\lambda$$

ולכן:

$$\lim_{n\to\infty}(p\circ f)(z_n)=p\left(\lim_{n\to\infty}f(z_n)\right)=p(\lambda)=0$$

במילים אחרות, הפולינום $p\circ f$ מתאפס באינסוף ולכן הוא בהכרח הפונקציה הקבועה $0$. לפיכך כל הערכים שמניבה הפונקציה $f$ הם שורשים של $p$. זוהי קבוצה סופית, ומכיוון ש־$f$ רציפה, נסיק כי היא בהכרח קבועה (ושווה לשורש כלשהו של $p$). מכאן $f$ רגולרית ב־$\infty$, בסתירה להנחת השלילה. $\square$