מבוא לקומבינטוריקה ותורת הגרפים:
פתרון מבחן לדוגמה תש"ע

גרסה 1.1, יוני 2011

ברק שושני
baraksh@gmail.com | http://baraksh.co.il/

שאלות

1. חשבו את הסכום:

$$\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{3}$$

2. הוכיחו כי בכל צביעה של משבצות של לוח 16×6 בשלושה צבעים קיים מלבן שכל ארבע פינותיו צבועות באותו צבע.

3. חשבו את מספר המספרים השלמים בין 0 לבין 9999 בהם כל אחת מהספרות $2, 5, 8$ מופיעה לפחות פעם אחת.

4. חשבו את מספר הסדרות באורך n המורכבות מהספרות $0, 1, 2$ כאשר בסדרה לא מופיעות בסמיכות שתי ספרות זוגיות.

5. מיקי הכין חמישים שאלות שונות לקורס מבוא לקומבינטוריקה ותורת הגרפים. במהלך הסמסטר הוא חילק אותן לעשרה דפי תרגילים, כשבכל אחד חמש שאלות. בסוף הסמסטר הוא חילק אותן לעשר קבוצות, כשבכל אחת חמש שאלות, לפי דרגת הקושי שנקבעה עפ"י רמת ההצלחה של הסטודנטים בפתרון התרגילים. הוכיחו כי ישנה קבוצה של עשר מתוך חמישים השאלות המכילה שאלה אחת בדיוק מכל דרגת קושי ושאלה אחת בדיוק מכל דף תרגיל.

פתרונות

שאלה 1

חשבו את הסכום:

$$\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{3}$$

פתרון

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{3} &= \sum_{k=3}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,\frac{k!}{3!\,(k-3)!}\\
&= \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{3!}\sum_{k=3}^{n}\frac{(n-3)!}{(k-3)!\,(n-k)!}\\
&= \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{3!}\sum_{k=0}^{n-3}\frac{(n-3)!}{k!\,(n-3-k)!}\\
&= \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{3!}\sum_{k=0}^{n-3}\binom{n-3}{k}\\
&= \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{3!}\cdot 2^{n-3}\\
&= \frac{2^{n-4}n\,(n-1)\,(n-2)}{3}
\end{aligned}$$

$\square$

שאלה 2

הוכיחו כי בכל צביעה של משבצות של לוח 6×16 בשלושה צבעים קיים מלבן שכל ארבע פינותיו צבועות באותו צבע.

פתרון

בכל עמודה בעלת 6 משבצות יש $\binom{6}{2}\cdot 3 = 45$ אפשרויות שונות לקבל זוג של משבצות שצבועות באותו צבע: $\binom{6}{2}$ אפשרויות למיקום המשבצות ו־3 אפשרויות לצבע. עבור כל צביעה של עמודה, או שיש 2 משבצות מכל צבע (ואז יש 3 זוגות, אחד מכל צבע) או שיש לפחות 3 משבצות מצבע מסוים (ואז יש 3 אפשרויות לזוגות בצבע זה). בכל מקרה אנו רואים כי יש לפחות 3 זוגות בכל עמודה, ולכן לפחות $3\cdot 16 = 48$ זוגות בסה"כ בלוח. מעקרון שובך היונים, קיים זוג משבצות (מתוך 45 האפשרויות) שמופיע בשתי עמודות שונות, ולכן יוצר מלבן. $\square$

שאלה 3

חשבו את מספר המספרים השלמים בין 0 לבין 9999 בהם כל אחת מהספרות $2,5,8$ מופיעה לפחות פעם אחת.

פתרון

יש 4 אפשרויות לבחירת מיקום לספרה 2, 3 אפשרויות לספרה 5 ו־2 אפשרויות לספרה 8. נבחר את הספרה הרביעית כך שהמספר יכיל את הספרות $2,5,8$ בדיוק פעם אחת: ניתן לבחור בכל אחת מהספרות $0,1,3,4,6,7,9$, בסה"כ 7 אפשרויות. לפיכך מספר המספרים השלמים בין 0 לבין 9999 בהם כל אחת מהספרות $2,5,8$ מופיעה **בדיוק** פעם אחת הוא $4\cdot 3\cdot 2\cdot 7$. למספר זה יש להוסיף את המספרים בהם אחת מהספרות מופיעה בדיוק פעמיים: עבור כל ספרה, נבחר את שני המיקומים לספרה זו - $\binom{4}{2}$ אפשרויות, ואז יש 2 אפשרויות לשבץ את שתי הספרות הנותרות. בסה"כ נקבל:

$$4\cdot 3\cdot 2\cdot 7+3\cdot\binom{4}{2}\cdot 2=204 \qquad \square$$

שאלה 4

חשבו את מספר הסדרות באורך n המורכבות מהספרות $0,1,2$ כאשר בסדרה לא מופיעות בסמיכות שתי ספרות זוגיות.

פתרון

נסמן את מספר הסדרות באורך n אשר מקיימות את התנאי ב־S_n. לכל סדרה באורך $n-1$ אשר מקיימת את התנאי ניתן להוסיף את הספרה 1 (אם הספרה ה־$n-1$ היא 0 או 2) או את הספרות $0,1,2$ (אם הספרה ה־$n-1$ היא 1).
התרשים הבא מתאר את התהליך עבור $n=1,2,3$:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & \nearrow & 0 \\
0 & \rightarrow & 1 & \rightarrow & 1 \\
 & & & \searrow & 2 \\
 & & 0 & \rightarrow & 1 \\
 & \nearrow & & \nearrow & 0 \\
1 & \rightarrow & 1 & \rightarrow & 1 \\
 & \searrow & & \searrow & 2 \\
 & & 2 & \rightarrow & 1 \\
 & & & \nearrow & 0 \\
2 & \rightarrow & 1 & \rightarrow & 1 \\
 & & & \searrow & 2
\end{array}$$

כלומר:

$$S_1=3,\qquad S_2=5,\qquad S_3=11$$

יהי O_n מספר ה־1 שהוספנו בשלב ה־n ו־E_n מספר ה־0 וה־2 שהוספנו בשלב ה־n. מאחר שאת 1 ניתן להוסיף עבור כל אחת מהספרות $0,1,2$ במקום האחרון, מתקיים:

$$O_n=S_{n-1}$$

את 0 ו־2, לעומת זאת, ניתן להוסיף רק אם הספרה במקום האחרון היא 1:

$$E_n=2O_{n-1}=2S_{n-2}$$

כמו כן מתקיים כמובן:

$$S_n=O_n+E_n$$

לכן:

$$S_n=S_{n-1}+2S_{n-2}$$

לפתירת נוסחת הרקורסיה נשים לב כי הפולינום האופייני הוא:

$$r^2 - r - 2 = 0$$

ושורשיו הם $r = 2, -1$. לפיכך:

$$S_n = A \cdot (-1)^n + B \cdot 2^n$$

נציב את תנאי ההתחלה:

$$\left\{ \begin{array}{c} S_1 = -A + 2B = 3 \\ S_2 = A + 4B = 5 \end{array} \right\} \implies A = -\frac{1}{3}, \qquad B = \frac{4}{3}$$

מכאן, הפתרון הוא:

$$S_n = \frac{(-1)^{n+1} + 2^{n+2}}{3} \qquad \square$$

שאלה 5

מיקי הכין חמישים שאלות שונות לקורס מבוא לקומבינטוריקה ותורת הגרפים. במהלך הסמסטר הוא חילק אותן לעשרה דפי תרגילים, כשבכל אחד חמש שאלות. בסוף הסמסטר הוא חילק אותן לעשר קבוצות, כשבכל אחת חמש שאלות, לפי דרגת הקושי שנקבעה עפ"י רמת ההצלחה של הסטודנטים בפתרון התרגילים. הוכיחו כי ישנה קבוצה של עשר מתוך חמישים השאלות המכילה שאלה אחת בדיוק מכל דרגת קושי ושאלה אחת בדיוק מכל דף תרגיל.

פתרון

נבנה גרף דו־צדדי עם צדדים X ו־Y באופן הבא: כל אחד מ־10 הקדקודים ב־X מתאים לדף תרגילים וכל אחד מ־10 הקדקודים ב־Y מתאים לדרגת קושי. הצלעות המחברות בין X ו־Y מתאימות לשאלות: צלע שמחברת בין קדקוד X_i לקדקוד Y_j מייצגת שאלה שנמצאת בדף תרגילים i והיא בעלת דרגת קושי j.

תהי S תת־קבוצה של X, ונסמן $n \equiv |S|$ $(1 \leq n \leq 10)$. אנו יודעים כי בכל דף תרגילים יש 5 שאלות, ולכן יש בסה"כ $5n$ שאלות שקשורות לקבוצה S. בנוסף יש (רק) 5 שאלות בכל דרגת קושי, ולכן $5n$ השאלות חייבות לכלול שאלות מלפחות n דרגות קושי שונות. תהי $N(S)$ קבוצת כל הקדקודים שמחוברים ל־S, אז היא כוללת לפחות n קדקודים (כמספר דרגות הקושי). לכן $|N(S)| \geq |S|$, ולפי משפט הול קיים זיווג של X לתוך Y. זיווג כזה מחבר כל תרגיל לדרגת קושי אחת בדיוק באופן חד־חד־ערכי, ולכן ייתן לנו קבוצה של עשר שאלות המכילה שאלה אחת בדיוק מכל דרגת קושי ושאלה אחת בדיוק מכל דף תרגיל, כנדרש. $\square$