מכניקה אנליטית: סיכום ודף נוסחאות

גרסה 1.2, פברואר 2011

ברק שושני
baraksh@gmail.com | http://baraksh.co.il/

1 מכניקה ניוטונית

1.1 מכניקה של חלקיק יחיד

אם $\mathbf{r}$ הוא וקטור המיקום של החלקיק, אז **המהירות** ו**התאוצה** הן:

$$\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}}, \qquad \mathbf{a} \equiv \ddot{\mathbf{r}}$$

התנע הקווי הוא:

$$\mathbf{p} \equiv m\dot{\mathbf{r}}$$

ומתקיים **החוק השני של ניוטון**:

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$$

כאשר $\mathbf{F}$ הוא סכום **הכוחות** הפועלים על החלקיק. אם המסה קבועה נקבל:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\ddot{\mathbf{r}}$$

מכאן ניתן להסיק כי התנע הקווי של החלקיק נשמר אם סכום הכוחות הפועלים עליו הוא אפס. **התנע הזוויתי** סביב ציר כלשהו הוא:

$$\mathbf{L} \equiv \tilde{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}$$

כאשר $\tilde{\mathbf{r}}$ הוא וקטור מהציר לחלקיק (אם הציר הוא ב־$\mathbf{0}$ אז $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}$). **מומנט הכוח** הוא:

$$\mathbf{N} \equiv \tilde{\mathbf{r}} \times \mathbf{F}$$

ומתקיים חוק אנלוגי לחוק השני של ניוטון:

$$\mathbf{N} = \dot{\mathbf{L}}$$

מכאן ניתן להסיק כי התנע הזוויתי של החלקיק נשמר אם לא פועל עליו מומנט כוח. **העבודה** שעושה הכוח $\mathbf{F}$ על החלקיק כדי להעבירו מנקודה $\mathbf{x}_1$ לנקודה $\mathbf{x}_2$ מוגדרת כך:

$$W_{12} \equiv \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}$$

הכוח $\mathbf{F}$ הוא **כוח משמר** אם העבודה W_{12} אינה תלויה בבחירת המסלול בין $\mathbf{x}_1$ ל־$\mathbf{x}_2$. לכן כוח משמר מקיים:

$$\oint \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = 0$$

לכל מסלול סגור. בנוסף, תנאי הכרחי ומספיק לכוח משמר הוא:

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}}$$

כאשר V היא **האנרגיה הפוטנציאלית**. **האנרגיה הקינטית** של החלקיק היא:

$$T \equiv \frac{1}{2} m \left\| \dot{\mathbf{r}} \right\|^2$$

חוק שימור האנרגיה קובע כי כאשר יש רק כוחות משמרים, האנרגיה הכוללת $T + V$ נשמרת.

1.2 מכניקה של מערכת חלקיקים

<u>מעתה והלאה נסמן תמיד את מספר החלקיקים במערכת ב־N.</u> יהי $\mathbf{r}_j$ וקטור המיקום של החלקיק ה־j ותהי m_j המסה שלו. **מרכז המסה** של מערכת החלקיקים מוגדר כך:

$$\mathbf{R} \equiv \frac{\sum m_j \mathbf{r}_j}{\sum m_j} \equiv \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i$$

כאשר M היא המסה הכוללת של החלקיקים. במקרה הרציף נקבל:

$$\mathbf{R} = \frac{\iiint \mathbf{r}\,\mathrm{d}m}{\iiint \mathrm{d}m} = \frac{1}{M} \iiint \mathbf{r}\,\mathrm{d}m$$

התנע הקווי הכולל הוא:

$$\mathbf{P} \equiv \sum_{j=1}^{N} \mathbf{p}_i \equiv \sum_{j=1}^{N} m_j \dot{\mathbf{r}}_j \equiv M\dot{\mathbf{R}}$$

והוא שקול לתנע הקווי של חלקיק נקודתי בעל מסה M הנע יחד עם מרכז המסה. נסמן ב־$\mathbf{F}_j^{\mathrm{ex}}$ את הכוח החיצוני שפועל על החלקיק ה־j, אז **הכוח החיצוני הכולל** הוא:

$$\mathbf{F}^{\mathrm{ex}} \equiv \sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_j^{\mathrm{ex}}$$

נניח כי כל הכוחות הפנימיים בין החלקיקים מקיימים את **החוק השלישי של ניוטון** בצורתו החלשה: הכוחות שמפעילים שני חלקיקים אחד על השני הם שווים בגודלם והפוכים בכיוונם. במקרה זה מתקיים חוק אנלוגי לחוק השני של ניוטון:

$$\mathbf{F}^{\mathrm{ex}} = \dot{\mathbf{P}} = M\ddot{\mathbf{R}}$$

כאשר השוויון הימני נכון רק אם המסה הכוללת קבועה. מכאן ניתן להסיק כי אם סך הכוחות החיצוניים הוא אפס, התנע הקווי הכולל נשמר. **התנע הזוויתי הכולל** סביב ציר כלשהו הוא:

$$\mathbf{L}^{\mathrm{tot}} \equiv \sum_{j=1}^{N} \mathbf{L}_j \equiv \sum_{j=1}^{N} \mathbf{r}_j \times \mathbf{p}_j$$

כאשר $\tilde{\mathbf{r}}_j$ הוא וקטור מהציר לחלקיק ה־j. **מומנט הכוח החיצוני הכולל** הוא:

$$\mathbf{N}^{\mathrm{ex}} \equiv \sum_{j=1}^{N} \tilde{\mathbf{r}}_j \times \mathbf{F}_j^{\mathrm{ex}}$$

נניח כעת כי כל הכוחות הפנימיים מקיימים את החוק השלישי של ניוטון בצורתו החזקה: הכוחות שמפעילים שני חלקיקים אחד על השני הם שווים בגודלם, הפוכים בכיוונם ופועלים לאורך הקו המחבר בין החלקיקים. במקרה זה מתקיים חוק אנלוגי לחוק השני הזוויתי של ניוטון:

$$\mathbf{N}^{\mathrm{ex}} = \dot{\mathbf{L}}^{\mathrm{tot}}$$

ומכאן, התנע הזוויתי הכולל נשמר אם מומנט הכוח החיצוני הכולל הוא אפס. אם נסמן ב־$\overline{\mathbf{r}}_j$ את מיקום החלקיק ה־j במערכת מרכז המסה, ב־$\overline{\mathbf{p}}_j \equiv m_j \dot{\overline{\mathbf{r}}}_j$ את התנע של החלקיק ה־j במערכת מרכז המסה וב־$\tilde{\mathbf{R}}$ את הווקטור מהציר אל מרכז המסה, נקבל:

$$\mathbf{L}^{\mathrm{tot}} = \tilde{\mathbf{R}} \times \mathbf{P} + \sum_{j=1}^{N} \overline{\mathbf{r}}_j \times \overline{\mathbf{p}}_j$$

כלומר, התנע הזוויתי הכולל מסביב לציר מסוים ניתן לפירוק לשני רכיבים: התנע הזוויתי של מרכז המסה ביחס לציר, וסכום התנעים הזוויתיים של כל החלקיקים ביחס למרכז המסה. בדומה, את **האנרגיה הקינטית הכוללת** ניתן לרשום כך:

$$T^{\mathrm{tot}} = \frac{1}{2} M \left\| \dot{\mathbf{R}} \right\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} m_j \left\| \dot{\overline{\mathbf{r}}}_j \right\|^2$$

כלומר, האנרגיה הקינטית הכוללת ניתנת לפירוק לשני רכיבים: האנרגיה הקינטית שהייתה מתקבלת אם כל המסה הייתה מרוכזת במרכז המסה ונעה איתו, וסכום האנרגיות הקינטיות של כל החלקיקים במערכת מרכז המסה. אם כל הכוחות הפנימיים והחיצוניים הם משמרים, כלומר ניתן לגזור אותם מפוטנציאלים, אז **האנרגיה הפוטנציאלית הכוללת** של המערכת היא:

$$V^{\mathrm{tot}} \equiv \sum_{j=1}^{N} V_j + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ij}$$

כאשר V_j היא האנרגיה הפוטנציאלית של החלקיק ה־j, V_{ij} היא האנרגיה הפוטנציאלית ממנה נגזר הכוח בין החלקיק ה־i לחלקיק ה־j:

$$\mathbf{F}_{ij} = -\frac{\partial V_{ij}}{\partial \mathbf{r}_{ij}}$$

ו־$\mathbf{r}_{ij} \equiv \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ הוא הווקטור המחבר בין שני החלקיקים. במקרה זה, האנרגיה הכוללת $T^{\mathrm{tot}} + V^{\mathrm{tot}}$ נשמרת.

2 מכניקה לגראנג'ית

2.1 קואורדינטות מוכללות

מערכת של N חלקיקים ניתנת לתיאור באמצעות $3N$ קואורדינטות בלתי־תלויות המכונות **דרגות חופש**. אלה הם רכיבי הווקטורים $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N$, המציינים את מיקומו של כל חלקיק. במערכות רבות התנועה מוגבלת בצורה מסוימת - למשל, חרוז שמאולץ לנוע על מוט. אם ניתן לתאר את האילוץ באמצעות משוואה שכוללת את הקואורדינטות של כל החלקיקים במערכת, ואולי גם של הזמן:

$$f\left(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, t\right) = 0$$

אז האילוץ נקרא **הולונומי**. אם יש תלות (מפורשת) בזמן האילוץ נקרא **ראונומי**, אחרת הוא נקרא **סקלרונומי**. כל משוואת אילוץ הולונומית מאפשרת לנו לכתוב קואורדינטה אחת כפונקציה של האחרות, ולכן מפחיתה דרגת חופש אחת; אם יש K משוואות אילוץ, ניוותר עם $3N - K$ דרגות חופש בלבד.
מעתה נסמן תמיד את מספר משוואות האילוץ ההולונומיות ב־K ואת מספר דרגות החופש הנותרות ב־$M \equiv 3N - K$. כמו כן, האינדקס i ינוע תמיד מ־1 עד M ואילו j ינוע מ־1 עד N. נוכל לתאר את המערכת בצורה פשוטה יותר אם נגדיר M קואורדינטות חדשות, **הקואורדינטות המוכללות**, אשר יסומנו q_i. לשם הנוחות נגדיר וקטור שמכיל את כל הקואורדינטות המוכללות:

$$\mathbf{q} = \left(q_1, \ldots, q_M\right)$$

תמיד נוכל לתאר את הקואורדינטות המקוריות $\mathbf{r}_j$ כפונקציות של הקואורדינטות המוכללות ושל הזמן (משוואה זו, כמו כל משוואה בעלת אינדקס חופשי שתופיע מעתה והלאה, יש להבין כסט של N משוואות):

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j\left(\mathbf{q}, t\right)$$

ולכן אם נמצא פתרון במונחי הקואורדינטות המוכללות נוכל להמיר אותו לפתרון במונחי הקואורדינטות המקוריות. אגב, זהות שימושית שמתקיימת עבור אילוצים הולונומיים היא "צימצום הנקודה":

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_j}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i}$$

2.2 כוחות מוכללים

הכוחות המוכללים מוגדרים כך:

$$Q_i \equiv \sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i}$$

כאשר כזכור, $\mathbf{r}_j$ הוא מיקום החלקיק ה־j ו־$\mathbf{F}_j$ הוא הכוח הפועל עליו. במקרים רבים, כל הכוחות במערכת נגזרים **מפוטנציאל** V שתלוי במיקומי החלקיקים ואולי גם בזמן:

$$\mathbf{F}_j = -\frac{\partial V\left(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, t\right)}{\partial \mathbf{r}_j}$$

ולכן גם הכוחות המוכללים נגזרים מהפוטנציאל:

$$Q_i = -\frac{\partial V\left(\mathbf{q}\right)}{\partial q_i}$$

במקרים אחרים, למשל חלקיק טעון בשדה אלקטרומגנטי (ראו סעיף 9.1), הכוחות המוכללים נגזרים **מפוטנציאל מוכלל** $V\left(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\right)$ שתלוי גם בקואורדינטות המוכללות $\mathbf{q}$ וגם בנגזרותיהן $\dot{\mathbf{q}}$ בצורה הבאה:

$$Q_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial V}{\partial q_i}$$

2.3 חשבון וריאציות: עקרון המילטון

נגדיר את **הפעולה** כך:

$$S\left[\mathbf{q}\right] \equiv \int_{t_1}^{t_2} L\left(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t\right) \mathrm{d}t$$

כאשר L הוא הלגראנג'יאן. נניח כי המערכת היא **מונוגנית**, כלומר כזו שבה כל הכוחות שאינם כוחות אילוץ נגזרים מפוטנציאל סקלרי שעשוי להיות פונקציה של הקואורדינטות, המהירויות והזמן. במקרה כזה, **עקרון המילטון** קובע כי תנועת המערכת מהזמן t_1 לזמן t_2 תהיה במסלול שעבורו הפעולה S מקבלת **ערך יציב**. במונח "ערך יציב" אנו מתכוונים שאם נשנה את מסלול האינטגרציה בצורה אינפיניטסימלית, האינטגרל ישמור על ערכו עד לסדר ראשון בשינוי האינפיניטסימלי. מושג זה דומה למושג של נקודת קיצון של פונקציה, אשר עשויה להופיע כאשר הנגזרת מתאפסת.
את השינוי האינפיניטסימלי של מסלול האינטגרציה נסמן ב־$\delta\mathbf{q} = \left(\delta q_1, \ldots, \delta q_M\right)$, ונכנה אותו **הווריאציה** על הקואורדינטות המוכללות. כך נוכל להגדיר את הווריאציה על הפעולה ועל הלגראנג'יאן:

$$\begin{aligned} \delta S &\equiv S\left[\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}\right] - S\left[\mathbf{q}\right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} L\left(\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} + \delta\dot{\mathbf{q}}, t\right) \mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} L\left(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t\right) \mathrm{d}t \\ &\equiv \int_{t_1}^{t_2} \delta L \,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta L}{\delta \mathbf{q}} \cdot \delta\mathbf{q}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

כאשר באינטגרל האחרון המכפלה היא מכפלה סקלרית (זהו סכום של M מחוברים מהצורה $\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i$) וה"נגזרת" $\frac{\delta L}{\delta \mathbf{q}}$ היא אגף שמאל של הגרסה הווקטורית של משוואות אוילר־לגראנג':

$$\frac{\delta L}{\delta \mathbf{q}} \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}$$

אנו נדרוש שהווריאציה על הפעולה תתאפס. אם האילוצים במערכת הם הולונומיים, הקואורדינטות $\mathbf{q}$ הן בלתי־תלויות אחת בשנייה ולכן גם הווריאציות $\delta\mathbf{q}$ בלתי־תלויות. במקרה זה, התאפסות הווריאציה כולה שקולה להתאפסות של כל אחד מהמקדמים $\frac{\delta L}{\delta q_i}$ בנפרד, ונקבל את משוואות אוילר־לגראנג'. אם נפתור את המשוואות נקבל סט של פונקציות $\mathbf{q}\left(t\right)$ שמאפסות את הווריאציה, ולפיכך קובעות את המסלול שעבורו מתקבל ערך יציב.

2.4 משוואות אוילר־לגראנג'

נניח כי כל האילוצים במערכת הם הולונומיים, וכי כל הכוחות נגזרים מפוטנציאל (רגיל או מוכלל). נגדיר את **הלגראנג'יאן** בתור ההפרש בין האנרגיה הקינטית לפוטנציאלית:

$$L\left(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t\right) \equiv T - V$$

אז ניתן להראות כי מתקיימות **משוואות אוילר־לגראנג'**:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

זהו סט של M משוואות, אחת לכל קואורדינטה מוכללת. ניתן לכתוב את M המשוואות בצורה חסכונית כמשוואה וקטורית אחת:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0$$

אגב, הלגראנג'יאן אינו יחיד. אם נגדיר:

$$L_2 \equiv L_1 + \frac{\mathrm{d}F\left(\mathbf{q}, t\right)}{\mathrm{d}t}$$

עבור פונקציה F כלשהי, או:

$$L_3 = cL_1$$

עבור קבוע c כלשהו, נקבל את אותן משוואות תנועה עבור L_1, L_2 ו־L_3.

2.5 כוחות שאינם נגזרים מפוטנציאל

גם אם קיימים במערכת כוחות שאינם נגזרים מפוטנציאל, תמיד ניתן לכתוב את משוואות אוילר־לגראנג' עם הכוחות המוכללים בצד ימין:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$$

מקרה נפוץ הוא המקרה של **כוחות חיכוך** אשר תלויים במהירות של כל חלקיק עם מקדם קבוע, $\mathbf{F}_j = -\left(\gamma_x \dot{x}_j, \gamma_y \dot{y}_j, \gamma_z \dot{z}_j\right)$. במקרה זה ניתן להגדיר את **פונקציית ריילי**:

$$\mathcal{F} \equiv \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \left(\gamma_x \dot{x}_j^2 + \gamma_y \dot{y}_j^2 + \gamma_z \dot{z}_j^2\right)$$

כאשר $\mathbf{r}_j \equiv \left(x_j, y_j, z_j\right)$. קל לראות כי כוחות החיכוך נגזרים מפונקציה זו, בדומה לפוטנציאל:

$$\mathbf{F}_j = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_j}$$

וכי הכוח המוכלל המתאים הוא:

$$Q_i \equiv -\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i} = -\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_j} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_j}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_i}$$

(השתמשנו ב"צימצום הנקודה"). נעביר את הכוח המוכלל לצד שמאל של משוואות אוילר־לגראנג' ונקבל:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

2.6 אנרגיה קינטית

האנרגיה הקינטית בקואורדינטות מוכללות היא:

$$T = T_0 + \sum_{i=1}^{M} T_i \dot{q}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{M} \sum_{k=1}^{M} T_{i,k} \dot{q}_i \dot{q}_k$$

כאשר:

$$T_0 \equiv \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2} m_j \left(\frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial t}\right)^2$$

$$T_i \equiv \sum_{j=1}^{N} m_j \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i}$$

$$T_{i,k} \equiv \sum_{j=1}^{N} m_j \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k}$$

נשים לב כי המחובר הראשון אינו תלוי במהירויות המוכללות $\dot{\mathbf{q}}$, השני לינארי במהירויות המוכללות והשלישי ריבועי במהירויות המוכללות. אם משוואות הטרנספורמציה של הקואורדינטות אינן תלויות בזמן, כפי שעשוי לקרות כאשר האילוצים הם סקלרונומיים (לא תלויים בזמן), רק המחובר השלישי יישאר ו־T תהיה תבנית ריבועית של המהירויות.
אגב, בקואורדינטות כדוריות האנרגיה הקינטית תהיה:

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + \left(r\dot{\theta}\right)^2 + \left(r \sin\theta \dot{\phi}\right)^2\right)$$

ובקואורדינטות גליליות:

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{\rho}^2 + \left(\rho\dot{\phi}\right)^2 + \dot{z}^2\right)$$

בנוסף, בקואורדינטות x, y במערכת שמסתובבת במהירות ω, האנרגיה הקינטית תהיה:

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + m\omega\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right) + \frac{1}{2} m\omega^2 \left(x^2 + y^2\right)$$

2.7 עקרון שינוי הסקאלה

נניח כי האנרגיה הפוטנציאלית היא **פונקציה הומוגנית** ממעלה k של הקואורדינטות, כלומר בשינוי סקאלת הקואורדינטות בפקטור α מתקיים:

$$V\left(\overline{\mathbf{q}}\right) = V\left(\alpha\mathbf{q}\right) = \alpha^k V\left(\mathbf{q}\right)$$

נשנה בנוסף את סקאלת הזמן בפקטור $\alpha^{1-k/2}$, אז מתקיים:

$$\dot{\overline{\mathbf{q}}} = \frac{\mathrm{d}\overline{\mathbf{q}}}{\mathrm{d}\overline{t}} = \frac{\mathrm{d}\left(\alpha\mathbf{q}\right)}{\mathrm{d}\left(\alpha^{1-k/2} t\right)} = \alpha^{k/2} \frac{\mathrm{d}\mathbf{q}}{\mathrm{d}t} = \alpha^{k/2} \dot{\mathbf{q}}$$

ואם האנרגיה הקינטית היא ריבועית במהירויות, נקבל:

$$\overline{L} = T\left(\dot{\overline{\mathbf{q}}}\right) - V\left(\overline{\mathbf{q}}\right) = \alpha^k T\left(\dot{\mathbf{q}}\right) - \alpha^k V\left(\mathbf{q}\right) = \alpha^k L$$

כלומר, לאחר הטרנספורמציה $\mathbf{q} \mapsto \overline{\mathbf{q}} = \alpha\mathbf{q}$, $t \mapsto \overline{t} = \alpha^{1-k/2} t$, הלגראנג'יאן מוכפל בקבוע ולכן משוואות התנועה אינן משתנות. אם $\mathbf{q}\left(t\right)$ הוא פתרון של משוואת התנועה אז גם $\alpha\mathbf{q}\left(\alpha^{1-k/2} t\right)$ פותר אותה, ולכן הקשר הבא בין הגדלים במערכת נשמר תמיד:

$$\frac{\overline{t}}{t} = \left(\frac{\overline{q_i}}{q_i}\right)^{1-k/2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\overline{t}}{\overline{q_i}^{1-k/2}} = \frac{t}{q_i^{1-k/2}}$$

כך למשל, פוטנציאל כבידתי $V = 1/r$ הוא הומוגני ממעלה $k = -1$ ולכן:

$$\frac{\overline{t}^2}{\overline{r}^3} = \frac{t^2}{r^3}$$

כלומר, היחס בין זמן המחזור של כוכב לכת סביב השמש לבין הציר הראשי של מסלולו הוא קבוע ואינו משתנה מפתרון לפתרון (זהו החוק השלישי של קפלר).

2.8 הצבה בלגראנג'יאן

כאמור לעיל, אם נתון אילוץ הולונומי (משוואה שמבטאת קשר בין הקואורדינטות במערכת, שעשוי להיות גם תלוי בזמן), ניתן להשתמש בו כדי לכתוב קואורדינטה אחת כפונקציה של האחרות. אם בנוסף נתון לגראנג'יאן, ניתן להציב בו את האילוץ וכך להפחית את מספר הקואורדינטות.
לעומת זאת, אם האילוץ אינו הולונומי, למשל כזה שכולל גם את המהירויות המוכללות, **אסור להציב אותו בלגראנג'יאן**. הצבה כזו תיתן משוואות תנועה שגויות. עם זאת, אם למשל האנרגיה נשמרת, ניתן להציב את האילוץ בביטוי עבור האנרגיה, להסיק מהביטוי החדש **אנרגיה קינטית אפקטיבית ואנרגיה פוטנציאלית אפקטיבית**, וליצור מהן לגראנג'יאן חדש.

2.9 כופלי לגראנג'

לעתים יהיו במערכת אילוצים הולונומיים נוספים, שלא נלקחו בחשבון בבחירת הקואורדינטות המוכללות, ולכן הווריאציות $\delta\mathbf{q}$ עשויות להיות תלויות, והפיתוח לעיל לא יהיה תקף. נניח כי קיימים m אילוצים:

$$f_k\left(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, t\right) = 0$$

כאשר $k = 1, \ldots, m$. במקרה זה נשתמש בפעולה:

$$S\left[\mathbf{q}\right] \equiv \int_{t_1}^{t_2} \left(L\left(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t\right) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k f_k\right) \mathrm{d}t$$

כאשר ה־λ_k נקראים **כופלי לגראנג'**. ניתן להראות כי הווריאציה על הפעולה תהיה:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\delta L}{\delta \mathbf{q}} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{q}}\right) \cdot \delta\mathbf{q}\,\mathrm{d}t$$

אך אין להסיק מכך שכל המקדמים שבסוגריים חייבים להתאפס, כי הווריאציות $\delta\mathbf{q}$ אינן בהכרח בלתי־תלויות. נבחר את ה־λ_k כך שעבור K מהקואורדינטות המקדמים יתאפסו ללא תלות בבחירה של δq_i, ואז נבחר את הווריאציות על $M-m$ הקואורדינטות שנותרו באופן בלתי־תלוי. כך נקבל את M המשוואות:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=-\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial q_i}$$

משוואות אלה זהות למשוואות אוילר־לגראנג' המוכרות, אשר מכילות כידוע, באגף ימין, את הכוחות המוכללים Q_i (ראו סעיף 2.4). לפיכך ניתן לזהות את כופלי לגראנג' עם הגדלים של כוחות האילוץ במערכת. למשוואות אלה יש להוסיף, כמובן, את m משוואות האילוץ.

2.10 כופלי לגראנג' עבור אילוצים חצי־הולונומיים

באופן כללי לא ניתן לטפל במערכת בעלת אילוצים לא־הולונומיים באמצעות כלים של חשבון וריאציות. עם זאת, קיים סוג מסוים של אילוצים, **אילוצים חצי־הולונומיים**, לגביהם הדבר אפשרי. אלה הם אילוצים מהצורה:

$$f_k\left(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t\right)=0$$

כלומר, תלויים גם במהירויות המוכללות. במקרה זה נקבל את המשוואות:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=-\sum_{k=1}^{m}\mu_k\frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_i}$$

כאשר סימנו את כופלי לגראנג' ב־μ_k במקום ב־λ_k כדי להבדיל בין המקרים. נשים לב כי הנגזרת היא לפי $\dot{q}_i$, ולא לפי q_i כמו במקרה של אילוצים הולונומיים.

3 מכניקה המילטונית

3.1 תנע צמוד ורותיאן

הגודל:

$$p_i\equiv\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

נקרא **התנע הצמוד הקנוני** של הקואורדינטה q_i. אם המהירות המוכללת $\dot{q}_i$ מופיעה בלגראנג'יאן, אך הקואורדינטה q_i אינה מופיעה בו במפורש, היא נקראת **קואורדינטה ציקלית**. במקרה זה נקבל ממשוואות אוילר־לגראנג':

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)=\dot{p}_i=0$$

לכן התנע הצמוד נשמר. במערכת כזאת ניתן להגדיר גודל דמוי־לגראנג'יאן, הנקרא **רותיאן**:

$$R\equiv p_i\dot{q}_i-L$$

ולהמשיך לפתור את הבעיה עם R בתפקיד L, כאשר מספר דרגות החופש יהיה $M-1$.
במקרה הכללי, הרותיאן הוא מעין מצב ביניים בין לגראנג'יאן להמילטוניאן. אם נפעיל את טרנספורם לג'נדר רק על K מהקואורדינטות נקבל רותיאן, ואז K הקואורדינטות שעברו טרנספורמציה יקיימו את משוואות המילטון ו־$M-K$ הנותרות יקיימו את משוואות אוילר־לגראנג'. (למשמעות המושגים, ראו בהמשך)

3.2 טרנספורם לג'נדר

נניח כי נתונה פונקציה $F\left(x\right)$. נסמן:

$$s\left(x\right)\equiv\frac{\mathrm{d}F\left(x\right)}{\mathrm{d}x}$$

אז **טרנספורם לג'נדר** של $F\left(x\right)$ היא הפונקציה:

$$G\equiv xF'-F\quad\Longrightarrow\quad G\left(s\right)=sx\left(s\right)-F\left(x\left(s\right)\right)$$

וניתן לראות כי פונקציה זו **מחליפה את התפקידים** של x ו־s, כלומר, מתקיים:

$$x\left(s\right)=\frac{\mathrm{d}G\left(s\right)}{\mathrm{d}s}$$

אם נפעיל כעת את טרנספורם לג'נדר על $G\left(s\right)$, נקבל בחזרה את $F\left(x\right)$. כלומר, טרנספורם לג'נדר הוא ההופכי של עצמו.

3.3 המילטוניאן

ההמילטוניאן מוגדר כך:

$$H\equiv\sum_{i=1}^{M}\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-L\equiv\sum_{i=1}^{M}\dot{q}_ip_i-L$$

זהו טרנספורם לג'נדר (במספר משתנים) של הלגראנג'יאן. ניתן להראות כי מתקיים:

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial L}{\partial t}$$

מכאן, אם הלגרנג'יאן אינו תלוי במפורש בזמן, ההמילטוניאן נשמר (אינו משתנה בזמן). בנוסף, אם האנרגיה הקינטית היא תבנית ריבועית של המהירויות המוכללות, כמו למשל במקרה של אילוצים סקלרונומיים, ההמילטוניאן שווה לאנרגיה הכוללת $E=T+V$. לכן כאשר שני התנאים לעיל מתקיימים, האנרגיה נשמרת.
במערכות בהן ההמילטוניאן נשמר, ניתן לגזור אותו ולהשוות לאפס כדרך נוספת לקבלת משוואות התנועה.

3.4 משוואות המילטון

נניח כי במערכת יש M דרגות חופש. נסמן $\mathbf{p}=\left(p_1,\ldots,p_M\right)$ ונגדיר את ההמילטוניאן לפי ההגדרה לעיל (הפעם בכתיב וקטורי):

$$H\equiv\dot{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{p}-L$$

ההמילטוניאן שנקבל יהיה פונקציה של $\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}$ ושל $\mathbf{p}$. נשתמש בהגדרת התנע הצמוד כדי לקבל את $\dot{\mathbf{q}}$ במונחים של $\mathbf{q}$ ו־$\mathbf{p}$, וכך נוכל לרשום את ההמילטוניאן כפונקציה של **המשתנים הקנוניים** $\mathbf{q}$ ו־$\mathbf{p}$ בלבד. במצב זה ניתן לתאר את התנועה באמצעות **משוואות המילטון**:

$$\dot{\mathbf{q}}=\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}},\qquad\dot{\mathbf{p}}=-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}$$

במקום M משוואות מסדר שני (משוואות אוילר־לגראנג'), קיבלנו $2M$ משוואות מסדר ראשון.

3.5 אי־תלות של q ו־p

במכניקה הלגראנג'ית, התייחסנו לקואורדינטה q ולנגזרתה $\dot{q}$ כאל שני משתנים בלתי־תלויים. במכניקה ההמילטונית, הגדרנו את התנע הקנוני p בתור הנגזרת של הלגראנג'יאן לפי $\dot{q}$, ולכן לכאורה הוא פונקציה של q ושל $\dot{q}$, ולכן אינו בלתי־תלוי ב־q. חשוב להבין שהמכניקה ההמילטונית אינה תלויה בהגדרה זו של p; מרגע שיש בידינו המילטוניאן, אנו מתייחסים אליו כאל פונקציה של שני משתנים בלתי־תלויים, q ו־p, אשר אף אחד מהם לא יסודי יותר מהשני. דבר זה בא לידי ביטוי במשוואות המילטון, שהן סימטריות ב־q וב־p (פרט לסימן מינוס).

3.6 ההמילטוניאן במספר מקרים מיוחדים

בקואורדינטות כדוריות, ההמילטוניאן הוא:

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}+\frac{p_\phi^2}{r^2\sin^2\theta}\right)+V\left(r,\theta,\phi\right)$$

ובקואורדינטות גליליות:

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_\rho^2+\frac{p_\phi^2}{\rho^2}+p_z^2\right)+V\left(\rho,\phi,z\right)$$

ההמילטוניאן של אוסילטור הרמוני חד־מימדי הוא:

$$H=\frac{1}{2m}\left(p^2+m^2\omega^2q^2\right),\qquad\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

4 כוחות מרכזיים

4.1 צמצום הבעיה: משני גופים לגוף אחד

נניח כי קיימות במערכת שתי מסות, m_1,m_2, והכוח ביניהן נגזר מפוטנציאל V שתלוי רק בווקטור $\mathbf{r}\equiv\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$ המחבר בין המסות, ואולי בנגזרותיו. במערכת יש 6 דרגות חופש, אותן נבחר לייצג באמצעות הקואורדינטות של מיקום מרכז המסה, $\mathbf{R}$, ושל הווקטור $\mathbf{r}$. הלגראנג'יאן הוא:

$$L=T\left(\dot{\mathbf{R}},\dot{\mathbf{r}}\right)-V\left(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},\ldots\right)$$

כפי שראינו בסעיף 1.2, את האנרגיה הקינטית ניתן לפרק לשני רכיבים, האנרגיה של תנועת מרכז המסה והאנרגיה של תנועת הגופים במערכת מרכז המסה:

$$T=\frac{1}{2}\left(m_1+m_2\right)\left\|\dot{\mathbf{R}}\right\|^2+\frac{1}{2}m_1\left\|\dot{\tilde{\mathbf{r}}}_1\right\|^2+\frac{1}{2}m_2\left\|\dot{\tilde{\mathbf{r}}}_2\right\|^2$$

כאשר:

$$\dot{\tilde{\mathbf{r}}}_1=\mathbf{r}_1-\mathbf{R}=\mathbf{r}_1-\frac{m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2}=-\frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{r}$$

ובדומה $\dot{\tilde{\mathbf{r}}}_2=\frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{r}$. מכאן:

$$T=\frac{1}{2}\left(m_1+m_2\right)\left\|\dot{\mathbf{R}}\right\|^2+\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\left\|\dot{\mathbf{r}}\right\|^2$$

אם נגדיר את **המסה המצומצמת**:

$$\mu\equiv\frac{m_1m_2}{m_1+m_2},\qquad\frac{1}{\mu}=\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}$$

אז נוכל לרשום את הלגראנג'יאן כך:

$$L=\frac{1}{2}\left(m_1+m_2\right)\left\|\dot{\mathbf{R}}\right\|^2+\frac{1}{2}\mu\left\|\dot{\mathbf{r}}\right\|^2-V\left(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},\ldots\right)$$

נשים לב כי רכיבי $\mathbf{R}$ הם קואורדינטות ציקליות, לכן התנע הצמוד:

$$\mathbf{P}=\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{R}}}=\left(m_1+m_2\right)\left\|\dot{\mathbf{R}}\right\|$$

נשמר. מכאן, $\mathbf{R}$ קבוע או נע במהירות קבועה, ולכן ניתן להתעלם מהביטוי $\frac{1}{2}\left(m_1+m_2\right)\left\|\dot{\mathbf{R}}\right\|^2$ בלגראנג'יאן (הוא לא ישפיע על משוואות התנועה). הלגראנג'יאן הסופי הוא, אם כן:

$$L=\frac{1}{2}\mu\left\|\dot{\mathbf{r}}\right\|^2-V\left(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},\ldots\right)$$

וצימצמנו את תנועת שני הגופים לתנועה אפקטיבית של גוף אחד בעל מסה μ הנע בהשפעת פוטנציאל מרכזי V שנמצא בראשית הצירים.

4.2 ניתוח הבעיה עבור פוטנציאל $V\left(r\right)$ כללי

מעתה נתעסק רק בבעיה של גוף אחד בעל מסה m הנע בהשפעת מקור פוטנציאל מרכזי $V\left(r\right)$ שנמצא בראשית הצירים ותלוי רק במרחק r של הגוף מהמקור. במערכת יש סימטריה כדורית, ולכן התנע הזוויתי $\mathbf{L}\equiv\mathbf{r}\times\mathbf{p}$ נשמר. מכאן נסיק כי $\mathbf{r}$ חייב להימצא תמיד במישור המאונך ל־$\mathbf{L}$, כלומר, תנועת הגוף תחת השפעת הכוח המרכזי מוגבלת למישור. לפיכך נוכל לתאר באופן מלא את תנועת הגוף באמצעות קואורדינטות קוטביות, r,θ. הלגראנג'יאן הוא:

$$L=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)-V\left(r\right)$$

נשים לב כי θ היא קואורדינטה ציקלית. התנע הצמוד שלה הוא כמובן התנע הזוויתי $\ell=\left\|\mathbf{L}\right\|$:

$$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta}=\ell=\mathrm{const}$$

בפרט מתקיים $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}\right)=0$, כאשר $\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$ הוא השטח שסורק וקטור המיקום של הגוף ביחידת זמן. המשפט הטוען כי שטח זה הוא קבוע נקרא **החוק השני של קפלר**, ואנו רואים כי הוא תקף, למעשה, עבור כל פוטנציאל מרכזי מהצורה $V\left(r\right)$. האנרגיה הכוללת נשמרת גם היא:

$$E=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)+V\left(r\right)=\mathrm{const}$$

כעת, משוואת אוילר־לגראנג' עבור הקואורדינטה r היא:

$$m\ddot{r}-mr\dot{\theta}^2+V'\left(r\right)=0$$

מהקואורדינטה $\dot{\theta}$ נוכל להיפטר באמצעות שימור התנע, $\dot{\theta}=\ell/mr^2$:

$$m\ddot{r}-\frac{\ell^2}{mr^3}+V'\left(r\right)=0$$

נעשה זאת גם עבור האנרגיה:

$$E=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}\frac{\ell^2}{mr^2}+V\left(r\right)$$

אם נרשום $\dot{r}=\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$, נעביר אגפים ונבצע אינטגרציה, נקבל:

$$t=\int\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{1}{\sqrt{E-V\left(r\right)-\frac{1}{2}\frac{\ell^2}{mr^2}}}\mathrm{d}r$$

עקרונית, ניתן לפתור את האינטגרל עבור $t\left(r\right)$ ואז להפוך את הפונקציה כדי לקבל את $r\left(t\right)$. לאחר מכן נשתמש בשימור התנע כדי לקבל את $\theta\left(t\right)$:

$$\theta\left(t\right)=\frac{\ell}{m}\int\frac{1}{r\left(t\right)^2}\mathrm{d}t$$

לפיכך בידינו פתרון מלא של הבעיה, בהינתן פוטנציאל $V\left(r\right)$, קבועים E,ℓ ותנאי התחלה $r\left(0\right),\theta\left(0\right)$.
ניתן גם להגדיר פוטנציאל אפקטיבי:

$$V_{\mathrm{eff}}\left(r\right)\equiv\frac{1}{2}\frac{\ell^2}{mr^2}+V\left(r\right)$$

ולהתייחס למערכת כאל מערכת בעלת דרגת חופש אחת ולגראנג'יאן:

$$L=\frac{1}{2}m\dot{r}^2-V_{\mathrm{eff}}\left(r\right)$$

4.3 מסלולים

אם אנו מעוניינים למצוא רק את מסלול התנועה של הגוף, ולא את מיקומו בכל זמן נתון, אין צורך למצוא את $r\left(t\right)$ ו־$\theta\left(t\right)$; ניתן, במקום זאת, למצוא את $r\left(\theta\right)$ או $\theta\left(r\right)$. משימור התנע:

$$\mathrm{d}t=\frac{mr^2}{\ell}\mathrm{d}\theta$$

נציב במשוואה עבור $t\left(r\right)$ ונקבל:

$$\theta=\int\mathrm{d}\theta=\int\frac{\ell\,\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{2m\left(E-V\left(r\right)\right)-\ell^2/r^2}}$$

אם האינטגרל מתבדר, מספר ההקפות סביב מרכז הכוח יהיה אינסופי.
אפשרות אחרת היא לבצע במשוואה $m\ddot{r}-\ell^2/mr^3+V'\left(r\right)=0$ החלפת משתנים $u=1/r$ ולהשתמש בקשר $\mathrm{d}t=\left(mr^2/\ell\right)\mathrm{d}\theta$ כדי לקבל משוואה עבור $u\left(\theta\right)$:

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+u=-\frac{m}{\ell^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}V\left(\frac{1}{u}\right)$$

משוואה זו נקראת לעתים **משוואת בינה (Binet)**. ממנה ניתן גם למצוא את הפוטנציאל בהינתן משוואת המסלול.

4.4 בעיית קפלר

בעיית קפלר עוסקת בכוח ריבועי הפוך:

$$F\left(r\right)=-\frac{k}{r^2},\qquad V\left(r\right)=-\frac{k}{r}$$

נציב את הפוטנציאל במשוואת המסלול לעיל ונשתמש בהחלפת משתנים $u=1/r$ ובאינטגרל:

$$\int\frac{1}{\sqrt{a+bx+cx^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{-c}}\arccos\left(-\frac{b+2cx}{\sqrt{b^2-4ac}}\right)$$

כדי לקבל את הפתרון:

$$\theta\left(u\right)=\theta_1-\arccos\frac{\ell^2u/mk-1}{\sqrt{2E\ell^2/mk^2+1}}$$

נחזור בחזרה למשתנה r ונקבל את המשוואה:

$$\frac{1}{r}=\frac{mk}{\ell^2}\left(1+\sqrt{1+\frac{2E\ell^2}{mk^2}}\cos\left(\theta-\theta_1\right)\right)$$

כאשר θ_1 היא אחת מ**זוויות המסעף** של המסלול, שהן הזוויות ביחס אליהן המסלול היא סימטרי. (זוהי לא הזווית $\theta_0=\theta\left(0\right)$!)
כעת, המשוואה הכללית ל**חתך קוני** עם מוקד אחד בראשית היא:

$$\frac{1}{r}=C\left(1+\varepsilon\cos\left(\theta-\theta_1\right)\right)$$

כאשר ε נקראת **האקסצנטריות**. לפיכך, המסלול שקיבלנו הוא חתך קוני עם אקסצנטריות:

$$\varepsilon=\sqrt{1+\frac{2E\ell^2}{mk^2}}$$

האקסצנטריות קובעת את צורת המסלול:

- אם $E>0$ אז $\varepsilon>1$ ונקבל **היפרבולה**;
- אם $E=0$ אז $\varepsilon=1$ ונקבל **פרבולה**;
- אם $E<0$ אז $\varepsilon<1$ ונקבל **אליפסה**;
- אם $E=-mk^2/2\ell^2$ אז $\varepsilon=0$ ונקבל **מעגל**.

נציג כמה מושגים חשובים הקשורים למסלול אליפטי. **הפריאפסיס** r_1 הוא המרחק הקרוב ביותר אליו הגוף מגיע; **האפואפסיס** r_2 הוא המרחק הרחוק ביותר אליו הגוף מגיע. במרחקים אלה, מהירותו הרדיאלית של הגוף היא אפס, ולכן הם פתרונותיה של המשוואה הריבועית:

$$r^2+\frac{k}{E}r-\frac{\ell^2}{2mE}=0$$

חצי הציר הראשי a הוא חצי הקוטר הגדול ביותר של האליפסה, והוא נקבע לפי המשוואה:

$$a=\frac{r_1+r_2}{2}=-\frac{k}{2E}$$

בנוסף מתקיים:

$$r_1=r\left(\theta_1\right)=a\left(1-\varepsilon\right),\qquad r_2=r\left(\theta_1+\pi\right)=a\left(1+\varepsilon\right)$$

כעת נוכל לכתוב את משוואת המסלול כך:

$$r=\frac{a\left(1-\varepsilon^2\right)}{1+\varepsilon\cos\left(\theta-\theta_1\right)}$$

זמן המחזור של המסלול הוא:

$$T=2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

אם הגוף הוא כוכב לכת (או שביט) שמקיף את השמש, נציב $k=Gm_1m_2$ ו־$m=\mu=m_1m_2/\left(m_1+m_2\right)$, ונקבל את **החוק השלישי של קפלר**:

$$T=\frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{G\left(m_1+m_1\right)}}\approx\frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{Gm_2}}$$

כאשר m_2 היא מסת השמש, והיא גדולה ביחס למסת כוכב הלכת m_1.

4.5 פיזור

זווית מרחבית היא השטח של פיסה שנחתכה מפניה של ספירת היחידה - באנלוגיה לזווית רגילה, שהיא האורך של קשת שנחתכה משפתו של מעגל היחידה. בקואורדינטות כדוריות, אלמנט אינפיניטסימלי של זווית מרחבית אשר כלואה בין θ ו־$\theta+\mathrm{d}\theta$ ובין ϕ ו־$\phi+\mathrm{d}\phi$ הוא:

$$\mathrm{d}\Omega=\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

כאשר יש סימטריה ביחס לזווית ϕ, למשל במקרה של כוח מרכזי, נוכל לרשום:

$$\mathrm{d}\Omega=2\pi\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

כעת, נניח כי קרן אחידה של חלקיקים בעלי מסה זהה ואנרגיה זהה נעה בקו ישר לעבר מוקד כוח מרכזי (כוכב, גרעין אטום וכו'), כאשר הכוח שואף לאפס באינסוף. נסמן ב־I את **העוצמה** של הקרן, כלומר את מספר החלקיקים אשר עוברים דרך יחידת שטח שמאונכת לקרן ביחידת זמן. כאשר חלקיק מתקרב למוקד הכוח הוא ימשך אליו או ידחה ממנו, ולכן יסטה ממסלולו. לאחר שהוא יעבור את מוקד הכוח, הכוח יקטן ותנועת החלקיק תחזור, בסופו של דבר, להיות בקו ישר. נסמן ב־θ את **זווית הפיזור** של החלקיק, שהיא הזווית בין כיוון תנועתו ההתחלתי של החלקיק (בזמן $-\infty$) לבין כיוונו הסופי (בזמן $+\infty$): מ־$\theta=0$ אם לא התרחש שום שינוי במסלול ועד $\theta=\pi$ אם החלקיק חזר כלעומת שבא. בנוסף נסמן ב־b את **פרמטר הפגיעה**, שהוא המרחק המאונך בין כיוון תנועתו ההתחלתי של החלקיק לבין מוקד הכוח; כלומר, אם החלקיק היה ממשיך בקו ישר בלי לסטות ממסלולו, הוא היה מגיע בסופו של דבר למרחק מינימלי b ממוקד הכוח ואז ממשיך להתרחק.
יהי I_θ מספר החלקיקים אשר פוזרו לתוך אלמנט הזווית המרחבית $\mathrm{d}\Omega$ שנמצא בין θ ו־$\theta+\mathrm{d}\theta$ במהלך יחידת זמן אחת. בהנחה כי הקשר בין b ו־θ הוא חד־חד־ערכי, מספר זה חייב להיות שווה למספר החלקיקים אשר פרמטר הפגיעה שלהם נמצא בין הערכים המתאימים של b ו־$b+\mathrm{d}b$. שטחה של הטבעת בין b ו־$b+\mathrm{d}b$ הוא $\mathrm{d}\sigma=2\pi b\,\mathrm{d}b$, לכן:

$$I_\theta\cdot2\pi\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=I_\theta\cdot\mathrm{d}\Omega=I\cdot\mathrm{d}\sigma=I\cdot2\pi b\,\mathrm{d}b$$

מתוך שוויונים אלה נוכל להגדיר את **חתך הפעולה הדיפרנציאלי**:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{I_\theta}{I}=\frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta}\right|$$

כלומר, זהו החלק היחסי של מספר החלקיקים שפוזרו לתוך $\mathrm{d}\Omega$ מתוך מספר החלקיקים הכולל ליחידת שטח. נשים לב כי חתך הפעולה הדיפרנציאלי הוא פונקציה של θ, ויש לו יחידות של שטח. הערך המוחלט הוכנס מפני שמספר החלקיקים חייב להיות חיובי. **חתך הפעולה הכולל** הוא:

$$\sigma=\iint\mathrm{d}\sigma=\iint\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\mathrm{d}\Omega=2\pi\int_0^\pi\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

אם קרן החלקיקים היא אחידה ובעלת רוחב אינסופי, כפי שאנו אכן מניחים, והכוח המרכזי שונה מאפס בכל המרחב, אז גם חלקיקים בעלי פרמטר פגיעה גדול מאוד יוסטו במידה מסוימת, ולכן חתך הפעולה הכולל יהיה אינסופי. רק אם הכוח מתאפס מעבר למרחק מסוים, הוא יהיה סופי.

4.6 פיזור מגוף סיבוב

שטף חלקיקים מתקדם בכיוון החיובי של ציר ה־z. עלינו למצוא את חתך הפעולה הדיפרנציאלי לפיזורים מגוף קשיח בעל שטח פנים שנוצר על־ידי סיבוב הפונקציה $f\left(z\right)$ סביב ציר ה־z. הזווית בה החלקיק מתפזר היא פעמיים זווית השיפוע של המשיק לשטח פני גוף הסיבוב:

$$\tan\frac{\theta}{2}=f'\left(z\right)$$

נשתמש בקשר זה, ונציב $f\left(z\right)=b$ לאחר הגזירה, כדי לקבל את הקשר $b\left(\theta\right)$. תחום הזוויות בו מתרחש הפיזור הוא:

$$\left\{\theta:0<b\left(\theta\right)<\max_{z}f\left(z\right)\right\}$$

4.7 הקשר בין θ ו־b

בכוח מרכזי, האנרגיה הכוללת והתנע נשמרים. נניח כי מהירותו ההתחלתית של החלקיק היא v_0, אז האנרגיה הכוללת והתנע הזוויתי של החלקיק יהיו תמיד:

$$E=\frac{1}{2}mv_0^2,\qquad \ell=mv_0b=b\sqrt{2mE}$$

באמצעות שימוש במשוואת המסלול ניתן לקבל את הקשר הבא בין זווית הפיזור ופרמטר הפגיעה:

$$\theta\left(b\right)=\pi-2\int_{r_{\min}}^{\infty}\frac{b\,\mathrm{d}r}{r\sqrt{r^2\left(1-V\left(r\right)/E\right)-b^2}}$$

כאשר r הוא המרחק בין החלקיק למוקד הכוח ו־$r_{\min}$ הוא המרחק המינימלי (פריאפסיס). עם זאת, לרוב ניתן למצוא קשר כזה בצורה פשוטה יותר. לדוגמה, **בפיזור ראתרפורד**, חלקיק אלפא מתקרב לגרעין אטום אשר מפעיל עליו כוח מרכזי דוחה $f=k/r^2$. האנרגיה חיובית, לכן המסלול הוא היפרבולה עם אקסצנטריות:

$$\varepsilon=\sqrt{1+\left(\frac{2Eb}{k}\right)^2}$$

ומשוואת מסלול:

$$\frac{1}{r}=\frac{mk}{\ell^2}\left(\varepsilon\cos\psi-1\right)$$

כאשר ψ היא הזווית של מיקום החלקיק ביחס למוקד הכוח, ו־$\psi=0$ בפריאפסיס. הן למיקום ההתחלתי של החלקיק והן למיקומו הסופי יש אותה זווית ψ_0, לכן זווית הפיזור היא $\theta=\pi-2\psi_0$. נציב $r\to\infty$ במשוואת המסלול ונקבל $\sin\left(\theta/2\right)=\cos\psi_0=1/\varepsilon$, לכן $\cot^2\left(\theta/2\right)=\varepsilon^2-1$ ומכאן:

$$b=\frac{k}{2E}\cot\frac{\theta}{2},\qquad \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{k^2}{8E^2\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

במקרה הכללי, בו הכוח אינו בהכרח דוחה, יש להציב $|k|$ במשוואה השמאלית. כמו כן, לעתים אנו מעוניינים דווקא ב־$\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\theta$:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\theta}=2\pi\sin\theta\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{\pi k^2\cos\frac{\theta}{2}}{2E^2\sin^3\frac{\theta}{2}}$$

4.8 פיזור במערכת המעבדה

כל הפיתוחים לעיל נעשו, כזכור, במערכת מרכז המסה. נניח כעת כי חלקיק בעל מסה m_1 נע לעבר חלקיק בעל מסה m_2 הנמצא במנוחה במערכת המעבדה. נסמן ב־θ_1 את זווית הפיזור של החלקיק m_1 במערכת המעבדה וב־θ_2 את זווית הפיזור של m_2. אז מתקיים:

$$\theta_1=\arctan\left(\frac{m_2\sin\theta}{m_1+m_2\cos\theta}\right),\qquad \theta_2=\frac{\pi-\theta}{2}$$

כאשר θ היא זווית הפיזור במערכת מרכז המסה.

5 תנועת גוף קשיח

5.1 תנועה סיבובית וכוחות מדומים

גוף קשיח הוא גוף שהמרחק בין כל שתי נקודות עליו נשאר קבוע בזמן. נשתמש בשתי מערכות קואורדינטות: מערכת הגוף, אשר מסתובבת יחד איתו, ומערכת המרחב, שהיא אינרציאלית. **וקטור המהירות הזוויתית** $\boldsymbol{\omega}$ של הגוף הוא וקטור שכיוונו הוא ציר הסיבוב (לפי כלל יד ימין), וגודלו הוא גודל המהירות הזוויתית. יהי $\mathbf{r}$ וקטור כלשהו על הגוף, אז מתקיים:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{space}}=\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{body}}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$$

כאשר $\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{space}}$ הוא השינוי בווקטור $\mathbf{r}$ כפי שנרשם ע"י צופה במערכת המרחב, ו־$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{body}}$ הוא השינוי בווקטור $\mathbf{r}$ כפי שנרשם ע"י צופה במערכת הגוף. בפרט, אם $\mathbf{r}$ הוא וקטור המיקום של חלקיק אז:

$$\overline{\mathbf{v}}=\mathbf{v}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$$

כאשר $\overline{\mathbf{v}}$ היא מהירות החלקיק במערכת המרחב ו־$\mathbf{v}$ היא המהירות במערכת הגוף. נגזור פעם נוספת ונקבל:

$$\overline{\mathbf{a}}=\mathbf{a}+2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}+\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\right)+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r}$$

כאשר $\overline{\mathbf{a}}$ היא תאוצת החלקיק במערכת המרחב ו־$\mathbf{a}$ היא התאוצה במערכת הגוף. אם מסת החלקיק היא m, הצופה במערכת הגוף רואה את החלקיק נע תחת השפעת הכוח האפקטיבי:

$$\mathbf{F}_{\mathrm{eff}}=\mathbf{F}-m\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\right)-2m\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}\right)-m\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r}$$

הביטוי $m\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\right)$ הוא **הכוח הצנטריפוגלי**, והוא משפיע תמיד. כאשר החלקיק נע במערכת הגוף, הביטוי $2m\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}\right)$, אשר נקרא **כוח קוריוליס**, משפיע גם הוא. הביטוי $m\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r}$ נקרא **כוח אוילר**, והוא מופיע רק כאשר המהירות $\boldsymbol{\omega}$ אינה קבועה.

5.2 אנרגיה קינטית

יהי $\mathbf{R}$ וקטור המיקום של מרכז המסה במערכת המרחב, ויהיו $\mathbf{r}_i$ וקטורי המיקום של החלקיקים במערכת הגוף, כאשר נקבע את ראשית הצירים במרכז המסה. אז האנרגיה הקינטית של הגוף היא:

$$T=\frac{1}{2}M\left\|\dot{\mathbf{R}}\right\|^2+\frac{1}{2}\sum_i m_i\left\|\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_i\right\|^2$$

כאשר m_i היא המסה של החלקיק ה־i ו־$M=\sum_i m_i$ היא המסה הכוללת של הגוף. האיבר הראשון מתאים לאנרגיית התנועה הקווית של מרכז המסה, והאיבר השני מתאים לאנרגיה הסיבובית סביב מרכז המסה. במערכת רציפה:

$$T=\frac{1}{2}M\left\|\dot{\mathbf{R}}\right\|^2+\frac{1}{2}\iiint\left\|\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\right\|^2\mathrm{d}m$$

כאשר $\mathrm{d}m=\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ הוא **אלמנט מסה** ו־ρ היא **צפיפות המסה** של הגוף.

5.3 מומנט ההתמד

מומנט ההתמד הוא הגודל האנלוגי למסה בתנועה סיבובית, והוא מודד את התנגדותו של הגוף לשינוי בתנועתו הסיבובית. מומנט ההתמד מוגדר עבור מערכת בדידה כך:

$$I=\sum_i m_ir_i^2$$

כאשר m_i היא מסת החלקיק ה־i ו־r_i הוא מרחק החלקיק מציר הסיבוב (<u>ולא</u> מראשית הצירים). עבור מערכת רציפה:

$$I=\iiint r^2\,\mathrm{d}m$$

כאשר $\mathrm{d}m=\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ הוא **אלמנט מסה**, ρ היא **צפיפות המסה** של הגוף ו־r הוא מרחק אלמנט המסה מציר הסיבוב. במונחים של מומנט ההתמד, האנרגיה הקינטית, גודל התנע הזוויתי וגודל מומנט הכוח על הגוף הם:

$$L=L_{\mathrm{cm}}+I\omega,\qquad T=T_{\mathrm{cm}}+\frac{1}{2}I\omega^2,\qquad N=I\alpha$$

כאשר ω היא המהירות הזוויתית ו־α היא התאוצה הזוויתית.

משפט הציר המקביל (משפט שטיינר): אם I_{cm} הוא מומנט ההתמד של גוף דרך ציר אשר עובר דרך מרכז המסה, אז מומנט ההתמד של הגוף דרך ציר שמקביל לציר המקורי ונמצא במרחק a ממנו יהיה:

$$I_a=I_{\mathrm{cm}}+Ma^2$$

5.4 מומנטי התמד שימושיים

* טבעת/קליפה גלילית ברדיוס R, סביב ציר העובר דרך המרכז ומאונך למישור הטבעת: $I=MR^2$
* טבעת ברדיוס R, סביב ציר העובר דרך המרכז ומקביל למישור הטבעת: $I=\frac{1}{2}MR^2$
* דיסק/גליל ברדיוס R, סביב ציר העובר דרך המרכז ומאונך למישור הדיסק: $I=\frac{1}{2}MR^2$
* דיסק ברדיוס R, סביב ציר העובר דרך המרכז ומקביל למישור הדיסק: $I=\frac{1}{4}MR^2$
* גליל ברדיוס R וגובה h, סביב ציר העובר דרך המרכז ומקביל למישור הגליל: $I=\frac{1}{12}M\left(3R^2+h^2\right)$
* מוט באורך L, סביב ציר העובר דרך המרכז ומאונך למוט: $I=\frac{1}{12}ML^2$
* מוט באורך L, סביב ציר העובר דרך הקצה ומאונך למוט: $I=\frac{1}{3}ML^2$
* קליפה כדורית בעלת רדיוס R, סביב כל ציר העובר דרך המרכז: $I=\frac{2}{3}MR^2$
* כדור בעל רדיוס R, סביב כל ציר העובר דרך המרכז: $I=\frac{2}{5}MR^2$
* משולש שווה־שוקיים בעל שתי שוקיים באורך L וזווית 2β ביניהן, סביב ציר העובר דרך הקודקוד ומאונך למישור המשולש: $I=\frac{1}{2}ML^2\left(1-\frac{2}{3}\sin^2\beta\right)$
* מצולע משוכלל (כלומר, כל הצלעות והזוויות שוות) בעל N צלעות ורדיוס R מהמרכז לכל קודקוד, סביב ציר העובר דרך הקודקוד ומאונך למישור המצולע: $I=\frac{1}{2}MR^2\left(1-\frac{2}{3}\sin^2\frac{\pi}{N}\right)$
* מלבן/תיבה בעלי צלעות באורך a,b, סביב ציר העובר דרך המרכז ומאונך למישור המלבן: $I=\frac{1}{12}M\left(a^2+b^2\right)$

5.5 טנזור ההתמד

טנזור ההתמד מוגדר עבור מערכת בדידה כך:

$$\mathsf{I}=\sum_i\begin{pmatrix}y_i^2+z_i^2 & -x_iy_i & -z_ix_i\\ -x_iy_i & z_i^2+x_i^2 & -y_iz_i\\ -z_ix_i & -y_iz_i & x_i^2+y_i^2\end{pmatrix}m_i$$

כאשר $\left(x_i,y_i,z_i\right)$ הן הקואורדינטות של המסה m_i לפי מערכת הקואורדינטות הנבחרת. עבור מערכת רציפה:

$$\mathsf{I}=\iiint\begin{pmatrix}y^2+z^2 & -xy & -zx\\ -xy & z^2+x^2 & -yz\\ -zx & -yz & x^2+y^2\end{pmatrix}\mathrm{d}m$$

כאשר $\left(x,y,z\right)$ הן הקואורדינטות של אלמנט המסה לפי מערכת הקואורדינטות הנבחרת. לרוב מחשבים את טנזור האנרגיה במערכת מרכז המסה. במונחים של טנזור ההתמד, האנרגיה הקינטית והתנע הזוויתי הם:

$$\mathbf{L}=\mathbf{L}_{\mathrm{cm}}+\mathsf{I}\boldsymbol{\omega},\qquad T=T_{\mathrm{cm}}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\mathsf{I}\boldsymbol{\omega}$$

כאשר $\mathbf{L}_{\mathrm{cm}}=\mathbf{R}\times M\dot{\mathbf{R}}$ הוא התנע הזוויתי של מרכז המסה ו־$T_{\mathrm{cm}}=\frac{1}{2}M\left\|\dot{\mathbf{R}}\right\|^2$ היא האנרגיה הקינטית של תנועת מרכז המסה (ראו בסעיף 5.2).

משפט הצירים המקבילים (משפט שטיינר המוכלל): אם I_{cm} הוא טנזור ההתמד של גוף ביחס למרכז המסה, אז מומנט ההתמד של הגוף ביחס לנקודה המוזזת בווקטור $\mathbf{a}$ ביחס למרכז המסה יהיה:

$$\mathsf{I}_{\mathbf{a}}=\mathsf{I}_{\mathrm{cm}}+\mathsf{I}_{\mathrm{p}}$$

כאשר I_{p} הוא טנזור ההתמד של מסה M המרוכזת בנקודה $\mathbf{a}$.

5.6 צירים ראשיים

הצירים הראשיים הם הווקטורים העצמיים של טנזור ההתמד, **ומומנטי ההתמד הראשיים** הם הערכים העצמיים המתאימים. כלומר, $\hat{\omega}$ הוא ציר ראשי ו־I הוא מומנט התמד ראשי אם $\mathsf{I}\hat{\omega}=I\hat{\omega}$. עבור בסיס אורתונורמלי של צירים ראשיים מתקיים:

$$\mathbf{L}=\left(I_1\omega_1,I_2\omega_2,I_3\omega_3\right)$$

$$T=\frac{1}{2}\left(I_1\omega_1^2+I_2\omega_2^2+I_3\omega_3^2\right)$$

לרוב ניתן למצוא את הצירים הראשיים משיקולי סימטריה. כמו כן, ציר הוא ציר ראשי אם אין צורך במומנט כוח כדי לסובב סביבו את הגוף במהירות זוויתית קבועה.

5.7 סוגי סביבונים

יהיו I_1,I_2,I_3 מומנטי ההתמד הראשיים של גוף כלשהו. הגוף נקרא:
* **סביבון כדורי** אם $I_1=I_2=I_3$,
* **סביבון סימטרי** אם $I_1=I_2\neq I_3$,
* **סביבון אסימטרי** אם $I_1\neq I_2\neq I_3$.

5.8 זוויות אוילר

נבנה מטריצה אורתוגונלית U ($\mathsf{U}^{\mathrm{T}}=\mathsf{U}^{-1}$) המאפשרת לעבור בין קואורדינטות במערכת הגוף לקואורדינטות במערכת המרחב כך:

$$\left.\overline{\mathbf{r}}\right|_{\mathrm{space}}=\mathsf{U}\left.\mathbf{r}\right|_{\mathrm{body}},\qquad \left.\mathbf{r}\right|_{\mathrm{body}}=\mathsf{U}^{\mathrm{T}}\left.\overline{\mathbf{r}}\right|_{\mathrm{space}}$$

ראשית נסדר את מערכת הגוף ומערכת המרחב כך שכל הצירים שלהן מקבילים. נסובב את מערכת הגוף בזווית ϕ סביב ציר z; לאחר מכן, בזווית θ סביב ציר x החדש; ולבסוף, בזווית ψ סביב ציר z החדש. מטריצת הסיבוב U תהיה (כאשר סימנו $\mathrm{c}\equiv\cos,\ \mathrm{s}\equiv\sin$):

$$\mathsf{U}=\begin{pmatrix}\mathrm{c}\,\psi\,\mathrm{c}\,\phi-\mathrm{c}\,\theta\,\mathrm{s}\,\phi\,\mathrm{s}\,\psi & -\mathrm{s}\,\psi\,\mathrm{c}\,\phi-\mathrm{c}\,\theta\,\mathrm{s}\,\phi\,\mathrm{c}\,\psi & \mathrm{s}\,\theta\,\mathrm{s}\,\phi\\ \mathrm{c}\,\psi\,\mathrm{s}\,\phi+\mathrm{c}\,\theta\,\mathrm{c}\,\phi\,\mathrm{s}\,\psi & -\mathrm{s}\,\psi\,\mathrm{s}\,\phi+\mathrm{c}\,\theta\,\mathrm{s}\,\phi\,\mathrm{c}\,\psi & -\mathrm{s}\,\theta\,\mathrm{c}\,\phi\\ \mathrm{s}\,\theta\,\mathrm{s}\,\psi & \mathrm{s}\,\theta\,\mathrm{c}\,\psi & \mathrm{c}\,\theta\end{pmatrix}$$

המהירות הזוויתית $\boldsymbol{\omega}$ מורכבת משלושת הרכיבים הבלתי־תלויים של המטריצה האנטי־סימטרית $\mathsf{A}=\mathsf{U}^{\mathrm{T}}\dot{\mathsf{U}}$ (במערכת הגוף) או $\mathsf{A}=\dot{\mathsf{U}}\mathsf{U}^{\mathrm{T}}$ (במערכת המרחב). מכאן, במערכת הגוף (בקואורדינטות לפי הצירים הראשיים):

$$\left.\boldsymbol{\omega}\right|_{\mathrm{body}}=\begin{pmatrix}\dot{\theta}\cos\psi+\dot{\phi}\sin\psi\sin\theta\\ -\dot{\theta}\sin\psi+\dot{\phi}\cos\psi\sin\theta\\ \dot{\psi}+\dot{\phi}\cos\theta\end{pmatrix}$$

ובמערכת המרחב:

$$\left.\overline{\boldsymbol{\omega}}\right|_{\mathrm{space}}=\begin{pmatrix}\dot{\theta}\cos\phi+\dot{\psi}\sin\phi\sin\theta\\ \dot{\theta}\sin\phi-\dot{\psi}\cos\phi\sin\theta\\ \dot{\phi}+\dot{\psi}\cos\theta\end{pmatrix}$$

מכאן ניתן למצוא את האנרגיה הקינטית של הגוף (במערכת המרחב). לדוגמה, עבור סביבון סימטרי:

$$T=\frac{1}{2}I_1\left(\dot{\theta}^2+\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right)+\frac{1}{2}I_3\left(\dot{\psi}+\dot{\phi}\cos\theta\right)^2$$

5.9 גלגול ללא החלקה

נניח כי כדור או גליל ברדיוס R מתגלגל ללא החלקה. יהיו ϕ,ω,α הזווית, המהירות הזוויתית והתאוצה הזוויתית של הגוף ויהיו x,v,a המיקום, המהירות והתאוצה של מרכז המסה. אז מתקיים:

$$x=\phi R,\qquad v=\omega R,\qquad a=\alpha R$$

במקרה הכללי יותר, תהי $\mathbf{v}$ מהירות מרכז המסה, $\boldsymbol{\omega}$ המהירות הזוויתית ו־$\mathbf{a}$ וקטור מנקודת המגע עם הרצפה למרכז המסה. אז מתקיים $\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{a}$.

6 תנודות קטנות סביב שיווי משקל יציב

6.1 אוסילטור הרמוני מרוסן ומאולץ

המקרה הכללי ביותר של תנודות קטנות במימד אחד הוא זה של **אוסילטור הרמוני מרוסן ומאולץ** עם משוואת תנועה מהצורה:

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=F\left(t\right)$$

ותנאי התחלה $x\left(0\right)=x_0,\dot{x}\left(0\right)=\dot{x}_0$, כאשר m היא המסה, b הוא **מקדם הריסון**, k הוא **קבוע הקפיץ** ו־$F\left(t\right)$ הוא **הכוח המאלץ**. משוואה זו היא **משוואה לינארית לא־הומוגנית מסדר שני**, ולכן הפתרון הכללי ביותר יהיה סכום של הפתרון ההומוגני (ללא כוח מאלץ), עם שני קבועי אינטגרציה שייקבעו לפי תנאי ההתחלה, והפתרון הפרטי עבור הכוח המאלץ הנתון. בדרך כלל הכוח המאלץ יהיה מהצורה $F\cos\left(\omega t\right)$, $F\sin\left(\omega t\right)$ או $F\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t}$. עבור כוח כללי מחזורי $F\left(t\right)$ ניתן לפתח בטור פורייה, ואז לפתור עבור כל איבר בנפרד.

אנו נפתור את המשוואה עבור $F\left(t\right)=F\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t}$. נרשום את המשוואה כך:

$$\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega_0^2x=f\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t}$$

כאשר $\gamma\equiv\frac{b}{2m}$, $\omega_0\equiv\sqrt{\frac{k}{m}}$ ו־$f\equiv\frac{F}{m}$. הפתרון ההומוגני הכללי ביותר הוא:

$$x_{\mathrm{h}}\left(t\right)=\mathrm{e}^{-\gamma t}\left(A\,\mathrm{e}^{+\Omega t}+B\,\mathrm{e}^{-\Omega t}\right)$$

כאשר $\Omega\equiv\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}$ ו־A,B הם קבועים שרירותיים. נפריד למקרים. אם $\gamma<\omega_0$ אנו במצב של **ריסון חלש**. במקרה זה Ω מדומה, לכן נסמן $\Omega\equiv\mathrm{i}\,\tilde{\Omega}$ כאשר $\tilde{\Omega}$ ממשי, והפתרון ההומוגני יהיה:

$$x_{\mathrm{h}}\left(t\right)=\mathrm{e}^{-\gamma t}\left(A\,\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\,\tilde{\Omega}t}+B\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\tilde{\Omega}t}\right)$$

זהו פתרון מחזורי עם תדירות $\tilde{\Omega}$, אשר דועך מעריכית. אחרת, אם $\gamma>\omega_0$ אנו במצב של **ריסון חזק**. במקרה זה Ω ממשי, וקל לראות כי הוא קטן מ־γ. הפתרון ההומוגני יהיה:

$$x_{\mathrm{h}}\left(t\right)=A\,\mathrm{e}^{-\left(\gamma-\Omega\right)t}+B\,\mathrm{e}^{-\left(\gamma+\Omega\right)t}$$

זהו פתרון לא־מחזורי אשר דועך מעריכית. לבסוף, אם $\gamma=\omega_0$ אנו במצב של **ריסון קריטי**. במקרה זה ניתן להראות כי הפתרון ההומוגני הוא:

$$x_{\mathrm{h}}\left(t\right)=\mathrm{e}^{-\gamma t}\left(A+Bt\right)$$

גם פתרון זה דועך מעריכית. לבסוף, הפתרון הפרטי הוא:

$$x_{\mathrm{p}}\left(t\right)=\frac{f}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)+2\,\mathrm{i}\,\omega\gamma}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t}$$

הפתרון המלא $x\left(t\right)$ יהיה סכום של הפתרון ההומוגני והפתרון הפרטי. נציב בו $t=0$ ונשווה עם תנאי ההתחלה כדי לקבל את הקבועים A ו־B.

6.2 תנודות קטנות: דרגת חופש אחת

בהינתן לגראנג'יאן מהצורה:

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-V\left(x\right)$$

נקודות שיווי המשקל הן אלה בהן הנגזרת של הפוטנציאל לפי x מתאפסת. בנקודות אלה, אם $V''\left(x_0\right)>0$ הנקודה x_0 היא נקודת שיווי משקל יציב, ואם $V''\left(x_0\right)<0$ היא נקודת שיווי משקל לא יציב. במקרה הראשון, תדירות התנודות הקטנות סביב נקודת שיווי המשקל תהיה $\omega=\sqrt{V''\left(x_0\right)/m}$.

6.3 תנודות קטנות: פיתוח מלא עבור מספר דרגות חופש

בפיתוח שלהלן נניח כי האנרגיה הפוטנציאלית תלויה רק בקואורדינטות המוכללות, והאנרגיה הקינטית תלויה רק במהירויות המוכללות. אם זה אינו המצב, נגדיר, באמצעות הביטוי לאנרגיה הכוללת, אנרגיה קינטית ופוטנציאלית אפקטיביות, ונמשיך לעבוד עם הלגראנג'יאן האפקטיבי.

נקודת שיווי משקל יציב היא כזו שבה יש לאנרגיה הפוטנציאלית נקודת מינימום. אם נסיט את המערכת מנקודת שיווי המשקל, היא תבצע תנועה הרמונית סביב נקודה זו. נקבע את נקודת שיווי המשקל להיות זו שבה כל הקואורדינטות מתאפסות, ונפתח את הפוטנציאל בטור טיילור עד לסדר שני:

$$V\left(\mathbf{q}\right)\approx V\left(\mathbf{0}\right)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\left.\frac{\partial V\left(\mathbf{q}\right)}{\partial q_i\partial q_j}\right|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}}q_iq_j$$

מהקבוע $V\left(\mathbf{0}\right)$ ניתן להתעלם (פשוט קובעים את הפוטנציאל להיות אפס בנקודת שיווי המשקל), ואילו הנגזרות הראשונות מתאפסות כי זוהי נקודת מינימום. נאסוף את הנגזרות השניות למטריצה ונכתוב את הפוטנציאל באמצעות מכפלה פנימית, עם המטריצה הזו בתור מטריקה:

$$\mathsf{K}\equiv\left(\left.\frac{\partial V\left(\mathbf{q}\right)}{\partial q_i\partial q_j}\right|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}}\right)_{j=1,\ldots,M}^{i=1,\ldots,M}\qquad V\left(\mathbf{q}\right)=\frac{1}{2}\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathsf{K}\mathbf{q}$$

(נשים לב כי המשוואה הזו מזכירה קצת את הפוטנציאל $V\left(q\right)=\frac{1}{2}kq^2$ של אוסילטור הרמוני). האנרגיה הקינטית לרוב תהיה כתובה מראש בצורה של תבנית ריבועית עם מקדמים קבועים. אם המקדמים לא קבועים, אפשר פשוט להציב בהם את נקודת שיווי המשקל. נגדיר את המטריצה:

$$\mathsf{M}\equiv\left(\left.\frac{\partial T\left(\dot{\mathbf{q}}\right)}{\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_j}\right|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}}\right)_{j=1,\ldots,M}^{i=1,\ldots,M}\qquad T\left(\dot{\mathbf{q}}\right)=\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}\mathsf{M}\dot{\mathbf{q}}$$

(שוב נשים לב כי המשוואה מזכירה את האנרגיה הקינטית $T\left(\dot{q}\right)=\frac{1}{2}m\dot{q}^2$). הלגראנג'יאן יהיה:

$$L=\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}\mathsf{M}\dot{\mathbf{q}}-\frac{1}{2}\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathsf{K}\mathbf{q}$$

נשתמש במשוואות אוילר־לגראנג':

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\mathbf{q}}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\mathbf{q}}=\mathbf{0}$$

ונקבל את המשוואה:

$$\mathsf{M}\ddot{\mathbf{q}}+\mathsf{K}\mathbf{q}=\mathbf{0}$$

לבסוף נציב $\mathbf{q}=C\boldsymbol{\Phi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t}$ ונקבל:

$$\left(\mathsf{K}-\omega^2\mathsf{M}\right)\boldsymbol{\Phi}=\mathbf{0}$$

כדי לפתור את המשוואה, יש למצוא עבור אילו ערכים של ω הדטרמיננטה $\det\left(\mathsf{K}-\omega^2\mathsf{M}\right)$ מתאפסת (אחרת קיים רק פתרון טריוויאלי). כל ערך כזה נקרא **תדירות עצמית**. כאשר נציב את הערכים ω_n ($n=1,\ldots,M$) במשוואה ונפתור, נקבל את **אופני התנודה** $\boldsymbol{\Phi}_n$ המתאימים, אשר הם תמיד ממשיים ונקבעים עד כדי קבוע. הפתרון הכללי יהיה החלק הממשי של הביטוי:

$$\boldsymbol{\Psi}\left(t\right)=\sum_{n=1}^{M}C_n\boldsymbol{\Phi}_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega_nt},\qquad \mathbf{q}\left(t\right)=\operatorname{Re}\boldsymbol{\Psi}\left(t\right)$$

באמצעות הצבת תנאי ההתחלה $\mathbf{q}\left(0\right),\dot{\mathbf{q}}\left(0\right)$ נוכל למצוא את הקבועים C_n, אשר באופן כללי יהיו מרוכבים:

$$\operatorname{Re}\boldsymbol{\Psi}\left(0\right)=\sum_{n=1}^{M}\operatorname{Re}\left(C_n\right)\boldsymbol{\Phi}_n=\mathbf{q}\left(0\right)$$

$$\operatorname{Re}\dot{\boldsymbol{\Psi}}\left(0\right)=-\sum_{n=1}^{M}\operatorname{Im}\left(C_n\right)\boldsymbol{\Phi}_n\omega_n=\dot{\mathbf{q}}\left(0\right)$$

6.4 אורתוגונליות

ניתן להראות כי אופני התנודה $\mathbf{\Phi}_n$ שמצאנו מקיימים את משוואת האורתוגונליות:

$$\mathbf{\Phi}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{\Phi}_j = 0, \qquad i \neq j$$

מאחר שהם נקבעים עד כדי קבוע, ניתן לבחור קבוע מתאים כדי לקבל יחס אורתונורמליות:

$$\mathbf{\Phi}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{\Phi}_j = \delta_{ij}$$

נניח כי ידוע לנו המצב ההתחלתי (המרוכב, כלומר כולל המהירויות) של המערכת, $\mathbf{\Psi}(0)$. אז מתקיים:

$$\mathbf{\Psi}(0) = \sum_{n=1}^{M} C_n \mathbf{\Phi}_n$$

באמצעות הכפלת שני האגפים משמאל ב־$\mathbf{\Phi}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{M}$ ושימוש ביחס האורתונורמליות, נוכל לקבל מיד את הקבועים C_i:

$$C_i = \mathbf{\Phi}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{\Psi}(0)$$

נשים לב כי ממשוואת התנועה:

$$\mathbf{K}\mathbf{\Phi}_j = \omega_j^2 \mathbf{M}\mathbf{\Phi}_j \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{\Phi}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{\Phi}_j = \omega_j^2 \mathbf{\Phi}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{\Phi}_j = \omega_j^2 \delta_{ij}$$

כלומר, גם עבור המטריצה $\mathbf{K}$ קיים יחס אורתוגונליות.

6.5 קואורדינטות נורמליות

נוכל לבטא את הלגראנג'יאן המקורי באמצעות קואורדינטות נוחות יותר - **הקואורדינטות הנורמליות** $\rho_n \equiv \mathrm{Re}\left(C_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega_n t}\right)$. מתקיים:

$$\mathbf{q}(t) = \mathrm{Re}\,\mathbf{\Psi}(t) = \sum_{n=1}^{M} \mathrm{Re}\left(C_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega_n t}\right)\mathbf{\Phi}_n = \sum_{n=1}^{M} \rho_n(t)\,\mathbf{\Phi}_n$$

לכן ניתן למצוא את הקואורדינטות ישירות באמצעות כלל האורתונורמליות:

$$\rho_m(t) = \mathbf{\Phi}_m^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{q}(t)$$

במונחים של הקואורדינטות הנורמליות, הלגראנג'יאן יהיה:

$$L = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{q} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{M}\left(\dot{\rho}_n^2 - \omega_n^2\rho_n^2\right)$$

כאשר השתמשנו בשני יחסי האורתוגונליות. אם נפעיל את משוואות אוילר־לגראנג' נגלה כי כל קואורדינטה נורמלית מקיימת משוואת תנועה עצמאית:

$$\ddot{\rho}_n(t) + \omega_n^2\rho_n(t) = 0, \qquad n = 1,\ldots,M$$

6.6 אילוצים

כאשר מופעל **כוח מאלץ** $\mathbf{Q}$ על המערכת, הוא כמובן לא נגזר מפוטנציאל ולכן אינו מופיע בלגראנג'יאן אלא בצד ימין של משוואות אוילר־לגראנג':

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}$$

נשים לב שהכוח $\mathbf{Q}$ הוא כוח מוכלל - בהינתן כוח $\mathbf{F}$ שפועל על המערכת, יש להמירו לכוח מוכלל על הקואורדינטות המתאימות (ראו סעיף 2.4). נמיר את המשוואה לקואורדינטות נורמליות באמצעות הכפלה משמאל ב־$\mathbf{\Phi}_n^{\mathrm{T}}$ ושימוש ביחסי האורתוגונליות:

$$\ddot{\rho}_n(t) + \omega_n^2\rho_n(t) = f_n$$

כאשר $f_n \equiv \mathbf{\Phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}$ ($\mathbf{Q}$ הוא וקטור, לא מטריצה!). לכל אחת מ־M המשוואות שקיבלנו יש פתרון הומוגני, אותו אנו כבר יודעים, ובנוסף יהיה לה פתרון פרטי אותו יש למצוא באמצעות ניחוש מושכל (בדר"כ צירוף לינארי של הפונקציות באגף ימין, ואולי נגזרותיהן).

6.7 ריסון

לעתים יתווסף גם **כוח מרסן** $\mathcal{F}$, לדוגמה כוח חיכוך, אשר לרוב יהיה פרופורציונלי למהירויות המוכללות $\dot{\mathbf{q}}$ ויינתן באמצעות מטריצת המקדמים $\mathbf{G}$:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\dot{\mathbf{q}}$$

(אם המקדמים לא קבועים נציב בהם את נקודת שיווי המשקל, כמו שעשינו עם האנרגיה הקינטית). כוח זה הוא הכללה של פונקציית ריילי (ראו סעיף 2.5), ואם נציב אותו במשוואות אוילר לגראנג' מהסעיף הנ"ל נקבל:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}$$

במקרים המעניינים, כוח החיכוך יהיה פרופורציונלי גם למהירות וגם למסה של כל חלקיק, ולכן $\mathbf{G}$ תהיה לכסינה אם $\mathbf{M}$ לכסינה. במקרה כזה ניתן להכפיל משמאל ב־$\mathbf{\Phi}_n^{\mathrm{T}}$ ולקבל:

$$\ddot{\rho}_n(t) + \gamma_n\dot{\rho}_n + \omega_n^2\rho_n(t) = \mathbf{\Phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}$$

כאשר $\gamma_n \equiv \mathbf{\Phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\mathbf{\Phi}_n$, כלומר $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1,\ldots,\gamma_M)$ הוא האלכסון של המטריצה $\mathbf{G}$ לאחר שליכסנו אותה.

7 משפט נתר

7.1 פרמטר טרנספורמציה אחד ודרגת חופש אחת

תהי $Q(s,t)$ טרנספורמציה רציפה של הקואורדינטה $q(t)$, כאשר t הוא הזמן, s הוא פרמטר הטרנספורמציה ומתקיים $Q(0,t) = q(t)$. נניח כי הלגראנג'יאן אינו משתנה לאחר הפעלת הטרנספורמציה (במלים אחרות, **אינווריאנטי** תחת הטרנספורמציה):

$$\overline{L} \equiv L\left(Q(s,t), \dot{Q}(s,t), t\right) = L(q,\dot{q},t)$$

אז הוא בהכרח אינו תלוי בפרמטר s, ולכן (אם נניח לשם הפשטות גם כי הוא אינו תלוי במפורש ב־t):

$$0 = \frac{\mathrm{d}\overline{L}}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial L}{\partial Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}\frac{\mathrm{d}\dot{Q}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s}\right)$$

כאשר השתמשנו בכלל השרשרת ובמשוואות אוילר־לגראנג'. מכאן, הגודל:

$$I(q,\dot{q}) \equiv \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \equiv \left.p\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}$$

הוא גודל שמור (כלומר, קבוע).

7.2 מספר פרמטרי טרנספורמציה ודרגות חופש

אם יש במערכת K פרמטרי טרנספורמציה $\mathbf{s} = (s_1,\ldots,s_K)$, ו־$M$ דרגות חופש שעוברות טרנספורמציה $\mathbf{Q}(\mathbf{s},t)$ כך ש־$\mathbf{Q}(\mathbf{0},t) = \mathbf{q}$, אז לכל פרמטר יש גודל שמור מתאים:

$$I_j(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) \equiv \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\cdot\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial s_j}\right|_{\mathbf{s}=\mathbf{0}} = \left.\sum_{i=1}^{M}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\cdot\frac{\partial Q_i}{\partial s_j}\right|_{s_1=\ldots=s_K=0}$$

כאשר $j = 1,\ldots,K$.

7.3 הלגראנג'יאן הוא נגזרת שלמה של פונקציה

אם הלגראנג'יאן אינו אינווריאנטי תחת הטרנספורמציה, אך נגזרתו ביחס ל־s היא נגזרת שלמה ביחס ל־t של פונקציה F כלשהי:

$$\frac{\partial L}{\partial s} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$$

אז הגודל הבא הוא גודל שמור:

$$I(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) \equiv \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\cdot\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial s}\right|_{s=0} - F$$

8 טרנספורמציות קנוניות

8.1 הגדרה

נניח כי הגדרנו סט של טרנספורמציות אשר מעבירות את הקואורדינטות המוכללות $\mathbf{q}$ והתנעים הצמודים $\mathbf{p}$ לקואורדינטות חדשות $\mathbf{Q}$ ותנעים חדשים $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q},\mathbf{p},t), \qquad \mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$$

כזכור, הכפלה של הלגראנג'יאן בקבוע או הוספת נגזרת שלמה לפי הזמן של פונקציה $F(\mathbf{q},t)$ כלשהי לא משנה את משוואות התנועה. נשתמש בהגדרת ההמילטוניאן $H = \mathbf{p}\cdot\mathbf{q} - L$, ונדרוש שהתנאי הבא יתקיים:

$$\lambda(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} - H) = \mathbf{P}\cdot\mathbf{Q} - \overline{H} + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$$

כאשר $\overline{H}$ הוא ההמילטוניאן החדש אחרי הטרנספורמציה, λ הוא קבוע ו־F היא פונקציה כלשהי של הזמן ושל $\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{Q},\mathbf{P}$. טרנספורמציות אשר מקיימות את התנאי נקראות **טרנספורמציות קנוניות מורחבות**. נשים לב כי הקבוע λ נובע רק משינוי יחידות המדידה בבעיה, ותמיד ניתן להפעיל טרנספורמציה נוספת אשר מעבירה אותו ל־1. לפיכך נוכל להניח בלי הגבלת הכלליות כי $\lambda = 1$. טרנספורמציות אשר מקיימות את התנאי לעיל עם $\lambda = 1$ נקראות **טרנספורמציות קנוניות**. ההמילטוניאן $\overline{H}$ מקיים את משוואות המילטון עם הקואורדינטות הקנוניות החדשות $\mathbf{Q},\mathbf{P}$:

$$\dot{\mathbf{Q}} = \frac{\partial\overline{H}}{\partial\mathbf{P}}, \qquad \dot{\mathbf{P}} = -\frac{\partial\overline{H}}{\partial\mathbf{Q}}$$

8.2 פונקציות יוצרות

הפונקציה F נקראת **פונקציה יוצרת** של הטרנספורמציה, ומתקיים:

$$\overline{H}(Q,P,t) = H\left(q(Q,P), p(Q,P), t\right) + \frac{\partial F}{\partial t}$$

ישנם ארבעה סוגים של פונקציות יוצרות, המסווגים לפי איזה זוג מבין $\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{Q},\mathbf{P}$ משמש כפרמטר לפונקציה. כל פונקציה כזו יוצרת טרנספורמציה מתאימה:

$$F_1(\mathbf{q},\mathbf{Q},t) \Longrightarrow \mathbf{p} = \frac{\partial F_1}{\partial\mathbf{q}},\ \mathbf{P} = -\frac{\partial F_1}{\partial\mathbf{Q}}$$

$$F_2(\mathbf{q},\mathbf{P},t) \Longrightarrow \mathbf{p} = \frac{\partial F_2}{\partial\mathbf{q}},\ \mathbf{Q} = \frac{\partial F_2}{\partial\mathbf{P}}$$

$$F_3(\mathbf{p},\mathbf{Q},t) \Longrightarrow \mathbf{q} = -\frac{\partial F_3}{\partial\mathbf{p}},\ \mathbf{P} = -\frac{\partial F_3}{\partial\mathbf{Q}}$$

$$F_4(\mathbf{p},\mathbf{P},t) \Longrightarrow \mathbf{q} = -\frac{\partial F_4}{\partial\mathbf{p}},\ \mathbf{Q} = \frac{\partial F_4}{\partial\mathbf{P}}$$

בפרט, הפונקציה $F = \mathbf{q}\cdot\mathbf{P}$ יוצרת את טרנספורמציית הזהות.
למציאת פונקציה יוצרת לפי טרנספורמציה $Q(q,p), P(q,p)$ נתונה, ראשית נהפוך את הטרנספורמציה ונקבל ביטויים ל־$q(Q,P), p(Q,P)$. כעת נבחר אחד מבין ארבעת הסוגים. אם בחרנו, למשל, $F_1(q,Q)$, נבטא את p ואת P באמצעות q,Q ונבצע אינטגרציה לביטויים שלמעלה.

8.3 סוגרי פואסון

סוגרי פואסון מוגדרים כך:

$$[u,v] \equiv \sum_{i=1}^{M}\left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial q_i}\right)$$

הם אינווריאנטיים לטרנספורמציות קנוניות, ומקיימים את הזהויות הבאות, כאשר u,v,w פונקציות של המשתנים הקנוניים $\mathbf{q},\mathbf{p}$:

1. $[u,u] = 0$,
2. $[u,v] = -[v,u]$,
3. **זהות יעקובי:** $[u,[v,w]] + [v,[w,u]] + [w,[u,v]] = 0$,
4. $[au+bv,w] = a[u,w] + b[v,w]$ כאשר $a,b\in\mathbb{R}$,
5. $[uv,w] = u[v,w] + v[u,w]$,
6. $[u,v]' = [u',v] + [u,v']$ (גזירה חלקית או שלמה לפי הזמן בשני האגפים).

אם נציב את המשתנים הקנוניים עצמם נקבל:

$$[q_i,q_j] = [p_i,p_j] = 0, \qquad [q_i,p_j] = \delta_{ij}$$

בנוסף, לכל פונקציה $u(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$ מתקיימת **משוואת התנועה**:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = [u,H] + \frac{\partial u}{\partial t}$$

כאשר H הוא כרגיל ההמילטוניאן. בפרט, עבור $u = H$:

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

לחלופין, אם u הוא קבוע של התנועה אז:

$$[H,u] = \frac{\partial u}{\partial t}$$

כאן הנגזרת השלמה מתאפסת, אך הנגזרת החלקית, בה מתחשבים רק בתלות המפורשת ב־t, לא בהכרח מתאפסת. אם קבוע התנועה אינו מכיל את t במפורש, $[H,u] = 0$. כמו כן, אם u,v הם קבועים של התנועה אז לפי זהות יעקובי $[H,[u,v]] = 0$, לכן סוגרי פואסון של שני קבועים של התנועה הם בעצמם קבוע של התנועה.
לבסוף, התנאים הבאים מתקיימים אם ורק אם הטרנספורמציה היא קנונית, ולכן משמשים לבדיקת קנוניות של טרנספורמציה נתונה:

$$[Q_i,Q_j] = [P_i,P_j] = 0, \qquad [Q_i,P_j] = \delta_{ij}$$

בפרט, במערכת ממימד אחד מספיק לבדוק $[Q(q,p), P(q,p)] = 1$.

8.4 משוואת המילטון־יעקובי

נתאר במקביל את אופן השימוש בפונקציה העיקרית של המילטון $S(\mathbf{q},\mathbf{P},t)$ ובפונקציה האופיינית של המילטון $W(\mathbf{q},\mathbf{P})$. הפונקציה S מתאימה לשימוש תמיד, ואילו W מתאימה רק כאשר ההמילטוניאן אינו תלוי במפורש בזמן.
נחפש טרנספורמציות קנוניות כך ש: $[S]$ כל הקואורדינטות והתנעים $\mathbf{Q},\mathbf{P}$ הם קבועים של התנועה; $[W]$ כל התנעים $\mathbf{P}$ הם קבועים של התנועה.
לשם כך מספיק לדרוש כי ההמילטוניאן החדש: $[S]$ מתאפס, $\overline{H} \equiv 0$; $[W]$ יהיה ציקלי בכל הקואורדינטות, $\overline{H} = H(\mathbf{P}) = E = \alpha_1$.
תחת תנאים אלו, משוואות התנועה החדשות יהיו:

$$\dot{\mathbf{P}} = -\frac{\partial\overline{H}}{\partial\mathbf{Q}} = \mathbf{0}, \qquad \dot{\mathbf{Q}} = \frac{\partial\overline{H}}{\partial\mathbf{P}} = \begin{cases}\mathbf{0} & [S]\\ \mathbf{v} & [W]\end{cases}$$

ופתרונותיהן המידיים יהיו:

$$\mathbf{P} = \mathrm{const}, \qquad \mathbf{Q} = \begin{cases}\boldsymbol{\beta} & [S]\\ \mathbf{v}t + \boldsymbol{\beta} & [W]\end{cases}$$

הפונקציה היוצרת מקיימת את **משוואת המילטון־יעקובי**:

$$H\left(\mathbf{q},\frac{\partial S}{\partial\mathbf{q}},t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = H\left(\mathbf{q},\frac{\partial W}{\partial\mathbf{q}}\right) - \alpha_1 = 0$$

פתרון מלא של משוואה זו יכלול: $[S]$ M קבועי אינטגרציה $\alpha_1,\ldots,\alpha_M$; $[W]$ $M-1$ קבועי אינטגרציה $\alpha_2,\ldots,\alpha_M$ אשר יתווספו לקבוע α_1. בתור התנעים (הקבועים) החדשים $\mathbf{P}$ ניתן לבחור באופן חופשי כל M פונקציות בלתי־תלויות של $\alpha_1,\ldots,\alpha_M$. בפרט, ניתן לבחור את התנעים להיות קבועי האינטגרציה עצמם, $\mathbf{P} = \boldsymbol{\alpha}$. חצי ממשוואות הטרנספורמציה:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial\mathbf{q}}, \qquad \mathbf{p} = \frac{\partial W}{\partial\mathbf{q}}$$

מתקיימות אוטומאטית, מכיוון שהן מלכתחילה שימשו אותנו לשם בניית משוואת המילטון־יעקובי. מתוך החצי השני:

$$\mathbf{Q} = \frac{\partial S}{\partial\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\beta}, \qquad \mathbf{Q} = \frac{\partial W}{\partial\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{v}(\boldsymbol{\alpha})\,t + \boldsymbol{\beta}$$

ניתן לחלץ את $\mathbf{q}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha},t)$. נותר לחשב את $2M$ הקבועים $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}$ במונחים של תנאי ההתחלה $\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0$, וקיבלנו פתרון מלא של הבעיה. הקשר בין S ו־W הוא:

$$S(\mathbf{q},\mathbf{P},t) = W(\mathbf{q},\mathbf{P}) - \alpha_1 t = W(\mathbf{q},\mathbf{P}) - Et$$

אגב, ניתן להראות כי הפונקציה S היא למעשה הפעולה (ראו סעיף 2.3):

$$S = \int L\,\mathrm{d}t$$

8.5 הפרדת משתנים

משוואת המילטון־יעקובי היא משוואה דיפרנציאלית חלקית, ולרוב יהיה קשה או אף בלתי־אפשרי לפתור אותה. אך כאשר ניתן לבצע הפרדת משתנים, המשוואה הופכת לסט של משוואות דיפרנציאליות רגילות מסדר ראשון, אותן תמיד ניתן לפתור. המשוואה היא **ספרבילית** אם ניתן לרשום את S בצורה הבאה:

$$S(\mathbf{q},\boldsymbol{\alpha},t) = \sum_{k=1}^{M} S_k(q_k,\boldsymbol{\alpha},t)$$

במקרה כזה נקבל M משוואות מהצורה:

$$H_k\left(q_k,\frac{\partial S_k}{\partial q_k},\boldsymbol{\alpha},t\right) + \frac{\partial S_k}{\partial t} = 0$$

אם בנוסף ההמילטוניאן אינו תלוי במפורש בזמן, נוכל לרשום לכל k:

$$S_k(q_k,\boldsymbol{\alpha},t) = W_k(q_k,\boldsymbol{\alpha},t) - \alpha_k t$$

ואז נקבל M משוואות דיפרנציאליות רגילות מסדר ראשון:

$$H_k\left(q_k,\frac{\partial W_k}{\partial q_k},\boldsymbol{\alpha}\right) = \alpha_k$$

הקבועים $\boldsymbol{\alpha}$ נקראים בהקשר זה **קבועי הפרדה**.
בקואורדינטות כדוריות, למשל, ניתן לבצע הפרדת משתנים אם הפוטנציאל הוא מהצורה:

$$V(r,\theta,\phi) = V_r(r) + \frac{V_\theta(\theta)}{r^2} + \frac{V_\phi(\phi)}{r^2\sin\theta}$$

ובקואורדינטות גליליות אם:

$$V(\rho,\phi,z) = V_\rho(\rho) + \frac{V_\phi(\phi)}{\rho^2} + V_z(z)$$

8.6 משתני פעולה־זווית

בתנועה מחזורית במימד אחד, נרצה לעבור באמצעות טרנספורמציה קנונית מהמשתנים p,q למשתנים I,ψ, כך שההמילטוניאן החדש לא יהיה תלוי ב־ψ. ממשוואות המילטון:

$$\dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial\psi} = 0, \qquad \omega \equiv \dot{\psi} = \frac{\partial H}{\partial I} = \mathrm{const}$$

כאשר ω היא התדירות הזוויתית. אנו רואים כי I קבוע בזמן. זמן המחזור יהיה:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}H}$$

משתנה הפעולה I מוגדר כך:

$$I \equiv \frac{1}{2\pi}\oint_{\partial\Omega} p\,\mathrm{d}q = \iint_{\Omega}\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q$$

כאשר האינטגרציה היא על פני מחזור אחד של q, ובשוויון השני השתמשנו במשפט סטוקס. משמעות השוויון השני היא ש־I הוא השטח במרחב הפאזה אשר תחום בתוך המסלול $\partial\Omega$. לאחר שמצאנו את $I(H)$, נחלץ את ההמילטוניאן החדש $H(I)$.

9 נספחים

9.1 חשמל ומגנטיות

ניתן לבטא את **השדה החשמלי** $\mathbf{E}$ ואת **השדה המגנטי** $\mathbf{B}$ באמצעות **הפוטנציאל הסקלרי** ϕ **והפוטנציאל הווקטורי** $\mathbf{A}$ באופן הבא:

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}, \qquad \mathbf{E} = -\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{r}} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$

(ביחידות CGS). הלגראנג'יאן של חלקיק בעל מטען q הוא:

$$L = \frac{1}{2}m\left\|\dot{\mathbf{r}}\right\|^2 + q\left(\frac{1}{c}\mathbf{A}\cdot\dot{\mathbf{r}} - \phi\right)$$

ואם נגזור אותו באמצעות משוואות אוילר־לגראנג' נקבל את **כוח לורנץ**:

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{B}\right)$$

ההמילטוניאן של החלקיק הוא:

$$H = \frac{1}{2m}\left\|\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right\|^2 + q\phi$$

9.2 אינטגרלים אליפטיים

האינטגרל האליפטי מהסוג הראשון הוא:

$$F(\phi,x) \equiv \int_0^{\phi}\frac{1}{\sqrt{1 - x\sin^2\theta}}\,\mathrm{d}\theta$$

ומסמנים ב־$K(x) \equiv F\left(\frac{\pi}{2},x\right)$ את **האינטגרל האליפטי השלם מהסוג הראשון**. **האינטגרל האליפטי מהסוג השני** הוא:

$$E(\phi,x) \equiv \int_0^{\phi}\sqrt{1 - x\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

ומסמנים ב־$E(x) \equiv E\left(\frac{\pi}{2},x\right)$ את **האינטגרל האליפטי השלם מהסוג השני**. מתקיים הקשר:

$$\frac{\mathrm{d}E(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{E(x) - K(x)}{2x}$$

9.3 קואורדינטות כדוריות וגליליות

קואורדינטות כדוריות:

$$(x,y,z) = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$$

$$(r,\theta,\phi) = \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \arccos\frac{z}{r}, \arctan\frac{y}{x}\right)$$

$$\mathrm{d}\mathbf{l} = \mathrm{d}r\,\hat{\mathbf{r}} + r\,\mathrm{d}\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\mathrm{d}V = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

קואורדינטות גליליות:

$$(x,y,z) = (\rho\cos\phi, \rho\sin\phi, z)$$

$$(\rho,\phi,z) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \arctan\frac{y}{x}, z\right)$$

$$\mathrm{d}\mathbf{l} = \mathrm{d}\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\,\mathrm{d}\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + \mathrm{d}z\,\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathrm{d}V = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$$