

# מכניקה אנליטית: פתרון מבחן מועד ב' תש"ע (19/3/2010)

גרסה 1.0, ינואר 2010

ברק שושני

baraksh@gmail.com | http://baraksh.co.il/

## חלק א'

### שאלה 1

כדור בעל מסה  $m = 1$  קופץ הלוך וחזור בין שני קירות המרוחקים זה מזה מרחק  $d$ , כאשר בין הקירות לא פועל עליו שום כוח.

א. שרטטו את תנועת הכדור במרחב הפאזה.

ב. למרות שלא ניתן לכתוב את ההמילטוניאן (כי הכוח אינו רציף), ניתן בכל זאת לחשב את משתנה הפעולה:

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq$$

חשבו אותו, וקבלו ישירות ממנו את זמן המחזור של תנועת הכדור כתלות באנרגיה הכוללת  $T(E)$ .

### פתרון סעיף א'

נניח כי קיר אחד נמצא ב- $-\frac{d}{2}$  והקיר השני ב- $+\frac{d}{2}$ . תהי  $E$  האנרגיה הכוללת של החלקיק (שאנו מניחים כי היא קבועה), ונניח כי הוא מתחיל ב- $q = 0$  עם מהירות התחלתית בכיוון החיובי. מהירותו והתנע שלו יהיו:

$$\dot{q} = \sqrt{\frac{2E}{m}}, \quad p = m\dot{q} = \sqrt{2Em}$$

החלקיק ימשיך במהירות קבועה עד לקיר ב- $+\frac{d}{2}$ , שם המהירות והתנע יחליפו סימן:

$$\dot{q} = -\sqrt{\frac{2E}{m}}, \quad p = m\dot{q} = -\sqrt{2Em}$$

בקיר ב- $-\frac{d}{2}$  הם יחליפו סימן שוב, וחוזר חלילה. לפיכך תנועת הכדור במרחב הפאזה תהיה פשוט מלבן בעל קודקודים ב- $q = \pm \frac{d}{2}$  ו- $p = \pm \sqrt{2Em}$ . □

### פתרון סעיף ב'

משתנה הפעולה הוא:

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq = \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \int_{-d/2}^{+d/2} \sqrt{2Em} dq = \frac{d\sqrt{2Em}}{\pi}$$

ההמילטוניאן הוא בעצם האנרגיה הכוללת  $E$ , לכן:

$$T(E) = 2\pi \frac{dI}{dE} = 2\pi \frac{d}{\pi} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2Em}} \cdot 2m = \sqrt{\frac{2m}{E}} d$$

□

## שאלה 2

נתון לגראנג'יאן של אוסילטור הרמוני פשוט:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

א. השתמשו בטרנספורמציה:

$$Q(A, B, t) = q(t) + A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

כדי למצוא שני קבועים של התנועה  $I_A(q, p)$ ,  $I_B(q, p)$  בעזרת משפט נתר המוכלל.

ב. השתמשו בשני קבועים אלו כדי למצוא ישירות את הפתרון הכללי עבור  $q(t)$ .

### פתרון סעיף א'

נגזור את הטרנספורמציה:

$$\dot{Q}(A, B, t) = \dot{q}(t) - A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t)$$

נציב את הטרנספורמציה בלגראנג'יאן, ונתעלם מאיברים מסדר שני בפרמטרי הטרנספורמציה  $A, B$ :

$$\begin{aligned}\bar{L} &= \frac{1}{2}m\dot{Q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 Q^2 \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{q}(t) - A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t))^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 (q(t) + A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))^2 \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{q}^2 - 2A\omega \sin(\omega t)\dot{q} + 2B\omega \cos(\omega t)\dot{q}) - \frac{1}{2}m\omega^2 (q^2 + 2A \cos(\omega t)q + 2B \sin(\omega t)q) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 + \frac{1}{2}m\omega (-2A \sin(\omega t)\dot{q} + 2B \cos(\omega t)\dot{q}) - \frac{1}{2}m\omega (2A \cos(\omega t)q + 2B \sin(\omega t)q) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 + m\omega (-A(\sin(\omega t)\dot{q} + \omega \cos(\omega t)q) + B(\cos(\omega t)\dot{q} - \omega \sin(\omega t)q)) \\ &= L + A \frac{d}{dt}(-m\omega \sin(\omega t)q) + B \frac{d}{dt}(m\omega \cos(\omega t)q)\end{aligned}$$

מכאן, הגדלים השמורים הם:

$$\begin{aligned}I_A &= \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial Q}{\partial A} \right|_{A=0} + m\omega \sin(\omega t)q \\ &= m \cos(\omega t)\dot{q} + m\omega \sin(\omega t)q \\ I_B &= \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial Q}{\partial B} \right|_{B=0} - m\omega \cos(\omega t)q \\ &= m \sin(\omega t)\dot{q} - m\omega \cos(\omega t)q\end{aligned}$$

□

### פתרון סעיף ב'

מתקיים:

$$\dot{q} = \frac{I_A}{m \cos(\omega t)} - \omega \tan(\omega t)q = \frac{I_B}{m \sin(\omega t)} + \omega \cot(\omega t)q$$

לכן:

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{1}{\omega \cot(\omega t) + \omega \tan(\omega t)} \left( \frac{I_A}{m \cos(\omega t)} - \frac{I_B}{m \sin(\omega t)} \right) \\ &= \frac{1}{m\omega} \left( \frac{1}{\cot(\omega t) + \tan(\omega t)} \left( \frac{I_A}{\cos(\omega t)} - \frac{I_B}{\sin(\omega t)} \right) \right) \\ &= \frac{1}{m\omega} \left( \frac{\sin(\omega t) \cos(\omega t)}{\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)} \left( \frac{I_A}{\cos(\omega t)} - \frac{I_B}{\sin(\omega t)} \right) \right) \\ &= \frac{1}{m\omega} \left( \frac{I_A \sin(\omega t) \cos(\omega t)}{\cos(\omega t)} - \frac{I_B \sin(\omega t) \cos(\omega t)}{\sin(\omega t)} \right) \\ &= \frac{I_A}{m\omega} \sin(\omega t) - \frac{I_B}{m\omega} \cos(\omega t) \end{aligned}$$

נסמן:

$$C_1 \equiv \frac{I_A}{m\omega}, \quad C_2 \equiv -\frac{I_B}{m\omega}$$

ונקבל את הפתרון המוכר:

□

$$q(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)$$

### שאלה 3

מערכת בת דרגת חופש אחת מתוארת על-ידי הלגראנזיאן:

$$L = \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{q}}{q} \right)^2 + A \left( \frac{\dot{q}}{q} \right)$$

א. מצאו את התנע הצמוד ל- $q$  ואת ההמילטוניאן  $H(q, p)$ .  
ב. הראו שהפונקציה  $F = \ln q - (qp - A)t$  היא קבוע של התנועה.

פתרון סעיף א'

התנע הצמוד הוא:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\dot{q}}{q^2} + \frac{A}{q}$$

לכן:

$$\frac{\dot{q}}{q} = qp - A$$

נרשום, אם כן, את הלגראנזיאן כך:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} (qp - A)^2 + A(qp - A) \\ &= \frac{1}{2} (q^2 p^2 - 2Aqp + A^2) + Aqp - A^2 \\ &= \frac{1}{2} q^2 p^2 - \frac{1}{2} A^2 \end{aligned}$$

ונקבל את ההמילטוניאן:

$$\begin{aligned} H &= \dot{q}p - L \\ &= q(qp - A)p - \left( \frac{1}{2}q^2p^2 - \frac{1}{2}A^2 \right) \\ &= q^2p^2 - Aqp - \frac{1}{2}q^2p^2 + \frac{1}{2}A^2 \\ &= \frac{1}{2}q^2p^2 - Aqp + \frac{1}{2}A^2 \\ &= \frac{1}{2}(qp - A)^2 \end{aligned}$$

### פתרון סעיף ב'

נשים לב כי הלגראנג'יאן אינו תלוי במפורש בזמן, לכן ההמילטוניאן הוא קבוע של התנועה. ניתן לרשום את ההמילטוניאן כך:

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{q}}{q} \right)^2$$

מכאן, גם:

$$h \equiv \sqrt{2H} = \frac{\dot{q}}{q} = \frac{d}{dt} (\ln q)$$

הוא קבוע של התנועה. לפיכך מתקיים:

$$\ln q = ht + C$$

כאשר  $C$  קבוע אינטגרציה. כעת ניתן לרשום את הפונקציה הנתונה כך:

$$\begin{aligned} F &= \ln q - (qp - A)t \\ &= \ln q - \frac{\dot{q}}{q}t \\ &= ht + C - ht \\ &= C \end{aligned}$$

□

ומכאן,  $F$  היא קבוע של התנועה.

## שאלה 4

תנועתו של גוף קשיח כפונקציה של הזמן מבוטאת באמצעות התלות בזמן של זוויות אוילר:

$$\phi = \Omega t, \quad \theta = \theta_0 + \alpha \sin(\omega t), \quad \psi = 0$$

טנזור מומנט ההתמד במערכת הגוף הינו:

$$\mathbf{I} = I_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

רשמו את האנרגיה הקינטית כפונקציה של הזמן  $t$  ושל הפרמטרים  $\alpha, \omega, \Omega, \theta_0, I_0$ .

## פתרון

המהירות הזוויתית במערכת הגוף כפונקציה של זוויות אוילר היא:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta \\ -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta \\ \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha \omega \cos(\omega t) \\ \Omega \sin(\theta_0 + \alpha \sin(\omega t)) \\ \Omega \cos(\theta_0 + \alpha \sin(\omega t)) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

לפיכך האנרגיה הקינטית היא:

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \\ &= \frac{1}{2} I_0 (\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_3^2) \\ &= \frac{1}{2} I_0 (\alpha^2 \omega^2 \cos^2(\omega t) + \Omega^2 \sin^2(\theta_0 + \alpha \sin(\omega t)) + 2\Omega^2 \cos^2(\theta_0 + \alpha \sin(\omega t))) \\ \square &= \frac{1}{2} I_0 (\alpha^2 \omega^2 \cos^2(\omega t) + \Omega^2 \cos^2(\theta_0 + \alpha \sin(\omega t)) + \Omega^2)\end{aligned}$$

## חלק ב'

### שאלה 5

מערכת בעלת דרגת חופש אחת מתוארת על-ידי ההמילטוניאן:

$$H = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} q^2 + \lambda \left( \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} q^2 \right)^2$$

א. רשמו את משוואות המילטון מבלי לפתור אותן.

ב. מצאו פונקציה  $F_1(q, Q)$  היוצרת טרנספורמציה קנונית שעבורה  $Q = p^2 + q^2$ , ורשמו גם את  $P(q, p)$  החדשה המתקבלת ממנה.

ג. עברו להמילטוניאן החדש  $\bar{H}(Q, P)$  המתקבל מטרנספורמציה זו. רשמו ופתרו את משוואות המילטון במשתנים החדשים.

ד. מצאו את הפתרון עבור  $p(t), q(t)$ , והראו שהוא מתאר תנועה הרמונית עם תדירות  $\omega(A)$  התלויה באמפליטודה  $A$ . מהי תלות זו?

### פתרון סעיף א'

משוואות המילטון הן:

$$\square \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p + \lambda(p^2 + q^2)p, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -q - \lambda(p^2 + q^2)q$$

### פתרון סעיף ב'

נדרוש:

$$Q = p^2 + q^2 \implies p = \sqrt{Q - q^2}$$

מכאן:

$$\frac{\partial F_1}{\partial q} = p = \sqrt{Q - q^2} \implies F_1(q, Q) = \int \sqrt{Q - q^2} dq = \frac{1}{2}q\sqrt{Q - q^2} + \frac{1}{2}Q \arcsin \frac{q}{\sqrt{Q}}$$

ולכן:

$$\begin{aligned}
P &= -\frac{\partial F_1}{\partial Q} \\
&= -\int \frac{\partial}{\partial Q} (\sqrt{Q - q^2}) dq \\
&= -\int \frac{1}{2\sqrt{Q - q^2}} dq \\
&= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{q}{\sqrt{Q}}\right)^2}} d\left(\frac{q}{\sqrt{Q}}\right) \\
&= -\frac{1}{2} \arcsin \frac{q}{\sqrt{Q}} \\
&= -\frac{1}{2} \arcsin \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}
\end{aligned}$$

□

### פתרון סעיף ג'

ההמילטוניאן המקורי הוא:

$$H(q, p) = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) + \frac{\lambda}{4}(p^2 + q^2)^2$$

לכן ההמילטוניאן החדש הוא:

$$\bar{H}(Q, P) = \frac{1}{2}Q + \frac{\lambda}{4}Q^2$$

ומשוואות המילטון במשתנים  $Q, P$  הן:

$$\dot{Q} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P} = 0, \quad \dot{P} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q} = -\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2}Q$$

מכאן נקבל מיידית:

$$Q(t) \equiv C, \quad P(t) = -\left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2}C\right)t - D$$

כאשר  $C, D$  קבועים.

□

### פתרון סעיף ד'

הטרנספורמציה שלנו היא:

$$Q(q, p) = p^2 + q^2, \quad P(q, p) = -\frac{1}{2} \arcsin \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}$$

נהפוך אותה:

$$q(Q, P) = -\sqrt{Q} \sin(2P), \quad p(Q, P) = \sqrt{Q} \cos(2P)$$

נציב את  $Q, P$  ונקבל:

$$q(t) = \sqrt{C} \sin((1 + \lambda C)t + 2D), \quad p(t) = \sqrt{C} \cos((1 + \lambda C)t + 2D)$$

נסמן  $\phi \stackrel{\text{def}}{=} 2D$  ו- $A \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{C}$  אז:

$$q(t) = A \sin(\omega t + \phi), \quad p(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

כאשר:

$$\omega \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \lambda A^2$$

□

## שאלה 6

מערכת בעלת 2 דרגות חופש מתוארת על-ידי ההמילטוניאן:

$$H = \frac{1}{2} (p_1^2 q_1^4 + p_2^2 q_1^2 - 2q_1^2 q_2)$$

א. חשבו את הלגראנג'יאן, וקבלו ממנו ביטוי עבור  $\dot{q}_2$ .

ב. רשמו את משוואת המילטון-יעקובי ופתרו אותה תוך שימוש בהפרדת משתנים:

$$S = W_1(q_1) + W_2(q_2) - Et$$

השאירו את הפתרונות בצורת אינטגרלים.

ג. זהו את  $E$  וקבוע נוסף  $\alpha$  כתנעים החדשים, וקבלו משוואות עבור הקואורדינטות החדשות  $\beta_E$  ו- $\beta_\alpha$ .

ד. מצאו את הפתרון עבור  $q_1(t)$  ובטאו בעזרתו את הפתרון עבור  $q_2(t)$ .

### פתרון סעיף א'

ממשוואות המילטון:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{\partial H}{\partial p_1} = p_1 q_1^4 \implies p_1 = \frac{\dot{q}_1}{q_1^4} \\ \dot{q}_2 &= \frac{\partial H}{\partial p_2} = p_2 q_1^2 \implies p_2 = \frac{\dot{q}_2}{q_1^2} \end{aligned}$$

טרנספורם לג'נדר עובד גם בכיוון ההפוך, לכן:

$$\begin{aligned} L &= \dot{q}_1 p_1 + \dot{q}_2 p_2 - H \\ &= \dot{q}_1 \frac{\dot{q}_1}{q_1^4} + \dot{q}_2 \frac{\dot{q}_2}{q_1^2} - \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\dot{q}_1}{q_1^4} \right)^2 q_1^4 + \left( \frac{\dot{q}_2}{q_1^2} \right)^2 q_1^2 - 2q_1^2 q_2 \right) \\ &= \frac{\dot{q}_1^2}{q_1^4} + \frac{\dot{q}_2^2}{q_1^2} - \frac{\dot{q}_1^2}{2q_1^4} - \frac{\dot{q}_2^2}{2q_1^2} + q_1^2 q_2 \\ &= \frac{\dot{q}_1^2}{2q_1^4} + \frac{\dot{q}_2^2}{2q_1^2} + q_1^2 q_2 \end{aligned}$$

כעת, ממשוואת אוילר-לגראנג' עבור  $q_2$  נקבל:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) &= \frac{\partial L}{\partial q_2} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{q}_2}{q_1^2} \right) &= q_1^2 \\ \Rightarrow \frac{\ddot{q}_2 q_1^2 - 2\dot{q}_2 q_1 \dot{q}_1}{q_1^4} &= q_1^2 \\ \Rightarrow \ddot{q}_2 &= \frac{2\dot{q}_1}{q_1} \dot{q}_2 + q_1^4 \end{aligned}$$

□

### פתרון סעיף ב'

משוואת המילטון-יעקובי היא:

$$H \left( q_1, q_2, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, t \right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

כלומר:

$$\frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial S}{\partial q_1} \right)^2 q_1^4 + \left( \frac{\partial S}{\partial q_2} \right)^2 q_1^2 - 2q_1^2 q_2 \right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

נציב את הפרדת המשתנים:

$$S = W_1(q_1) + W_2(q_2) - Et$$

ונקבל:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial W_1}{\partial q_1} \right)^2 q_1^4 + \left( \frac{\partial W_2}{\partial q_2} \right)^2 q_1^2 - 2q_1^2 q_2 \right) - E &= 0 \\ \Rightarrow \left( \frac{\partial W_1}{\partial q_1} \right)^2 q_1^4 + \left( \frac{\partial W_2}{\partial q_2} \right)^2 q_1^2 - 2q_1^2 q_2 &= 2E \\ \Rightarrow \left( \frac{\partial W_1}{\partial q_1} \right)^2 q_1^2 + \left( \frac{\partial W_2}{\partial q_2} \right)^2 - 2q_2 &= \frac{2E}{q_1^2} \\ \Rightarrow \left( \frac{\partial W_1}{\partial q_1} \right)^2 q_1^2 - \frac{2E}{q_1^2} = - \left( \frac{\partial W_2}{\partial q_2} \right)^2 + 2q_2 &= -\alpha \end{aligned}$$

כאשר  $\alpha$  קבוע הפרדה. קיבלנו, אם כן, שתי משוואות. הראשונה היא:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial W_1}{\partial q_1} \right)^2 q_1^2 - \frac{2E}{q_1^2} &= -\alpha \\ \Rightarrow \frac{\partial W_1}{\partial q_1} &= \frac{1}{q_1} \sqrt{\frac{2E}{q_1^2} - \alpha} \\ \Rightarrow W_1 &= \int \frac{1}{q_1} \sqrt{\frac{2E}{q_1^2} - \alpha} dq_1 \end{aligned}$$

והשנייה היא:

$$\begin{aligned} - \left( \frac{\partial W_2}{\partial q_2} \right)^2 + 2q_2 &= -\alpha \\ \Rightarrow \frac{\partial W_2}{\partial q_2} &= \sqrt{2q_2 + \alpha} \\ \Rightarrow W_2 &= \int \sqrt{2q_2 + \alpha} dq_2 \end{aligned}$$

□

פתרון סעיף ג'

עבור הקואורדינטות החדשות נקבל:

$$\begin{aligned}\beta_E &= \frac{\partial S}{\partial E} \\ &= \frac{\partial}{\partial E} (W_1(q_1) + W_2(q_2) - Et) \\ &= \frac{\partial}{\partial E} \left( \int \frac{1}{q_1} \sqrt{\frac{2E}{q_1^2} - \alpha} dq_1 + \int \sqrt{2q_2 + \alpha} dq_2 - Et \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int \frac{1}{q_1^2 \sqrt{\frac{2E}{\alpha} - q_1^2}} dq_1 - t \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left( -\frac{\sqrt{\frac{2E}{\alpha} - q_1^2}}{\frac{2E}{\alpha} q_1} \right) - t \\ &= -\frac{\sqrt{\alpha}}{2E} \sqrt{\frac{2E}{\alpha q_1^2} - 1} - t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_\alpha &= \frac{\partial S}{\partial \alpha} \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha} (W_1(q_1) + W_2(q_2) - Et) \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \int \frac{1}{q_1} \sqrt{\frac{2E}{q_1^2} - \alpha} dq_1 + \int \sqrt{2q_2 + \alpha} dq_2 - Et \right) \\ &= -\int \frac{1}{2\sqrt{2E - \alpha q_1^2}} dq_1 + \int \frac{1}{2\sqrt{2q_2 + \alpha}} dq_2 \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{2E} q_1\right)^2}} d\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2E}} q_1\right) + \frac{1}{2} \int \frac{1}{2\sqrt{2q_2 + \alpha}} d(2q_2 + \alpha) \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2E}} q_1\right) + \frac{1}{2} \sqrt{2q_2 + \alpha}\end{aligned}$$

□

פתרון סעיף ד'

ראינו כי:

$$\beta_E = -\frac{\sqrt{\alpha}}{2E} \sqrt{\frac{2E}{\alpha q_1^2} - 1} - t$$

נבודד את  $q_1$ :

$$q_1(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2E(\beta_E + t)^2}}$$

ולבסוף נבודד את  $q_2$ :

$$\begin{aligned}q_2 &= \frac{1}{2} \left( 2\beta_\alpha + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2E}} q_1\right) \right)^2 - \frac{\alpha}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left( 2\beta_\alpha + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arcsin\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2E(1 + 2E(\beta_E + t)^2)}}\right) \right)^2 - \frac{\alpha}{2}\end{aligned}$$

□

## שאלה 7

שתי מסות שוות  $m$  הקשורות ביניהן בקפיץ בעל קבוע  $k$  ואורך רפוי  $\ell$  נעות ללא חיכוך וללא השפעת כוח הכובד על חישוק מעגלי בעל רדיוס  $R$ .

א. כתבו את הלגראנג'יאן בקואורדינטות  $\varphi_1, \varphi_2$  המופיעות בשרטוט, וקבלו ממנו את משוואות התנועה.

ב. מהן נקודות שיווי-המשקל היציבות והלא-יציבות של המערכת?

ג. נתון כי  $\ell = \sqrt{2}R$ . כתבו את הלגראנג'יאן בקירוב של תנודות קטנות סביב נקודת שיווי-המשקל היציבה.

ד. חשבו את התדירויות של אופני התנודה העצמיים של המערכת.

ה. מצאו את הפתרון עבור  $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$  אם נתון:

$$\varphi_1(0) = 0, \quad \dot{\varphi}_1(0) = 0, \quad \varphi_2(0) = A, \quad \dot{\varphi}_2(0) = v$$

### פתרון סעיף א'

האנרגיה הקינטית היא:

$$T = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2)$$

לפי משפט הקוסינוסים, אורך הקפיץ בכל רגע נתון הוא:

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cdot \cos(\pi - \varphi_1 - \varphi_2)} \\ &= R\sqrt{2}\sqrt{1 + \cos(\varphi_1 + \varphi_2)} \end{aligned}$$

לפיכך האנרגיה הפוטנציאלית היא:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}k(D - \ell)^2 \\ &= \frac{1}{2}k\left(R\sqrt{2}\sqrt{1 + \cos(\varphi_1 + \varphi_2)} - \ell\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}k\left(2R^2(1 + \cos(\varphi_1 + \varphi_2)) - 2\sqrt{2}\ell R\sqrt{1 + \cos(\varphi_1 + \varphi_2)} + \ell^2\right) \\ &\cong kR\left(R\cos(\varphi_1 + \varphi_2) - \sqrt{2}\ell\sqrt{1 + \cos(\varphi_1 + \varphi_2)}\right) \end{aligned}$$

כאשר בשלב האחרון התעלמנו מקבועים חיבוריים, אשר אינם משפיעים על משוואות התנועה. מכאן, הלגראנג'יאן הוא:

$$L = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) - kR\left(R\cos(\varphi_1 + \varphi_2) - \sqrt{2}\ell\sqrt{1 + \cos(\varphi_1 + \varphi_2)}\right)$$

ומשוואות התנועה הן:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) &= \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} \\ \Rightarrow mR^2\ddot{\varphi}_1 &= -kR\left(-R\sin(\varphi_1 + \varphi_2) - \sqrt{2}\ell\frac{-\sin(\varphi_1 + \varphi_2)}{2\sqrt{1 + \cos(\varphi_1 + \varphi_2)}}\right) \\ \Rightarrow \ddot{\varphi}_1 &= \frac{k}{m}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\left(1 - \frac{\ell}{\sqrt{2}R\sqrt{1 + \cos(\varphi_1 + \varphi_2)}}\right) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) = \frac{\partial L}{\partial \varphi_2}$$

$$\Rightarrow mR^2 \ddot{\varphi}_2 = -kR \left( -R \sin(\varphi_1 + \varphi_2) - \sqrt{2}\ell \frac{-\sin(\varphi_1 + \varphi_2)}{2\sqrt{1 + \cos(\varphi_1 + \varphi_2)}} \right)$$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi}_2 = \frac{k}{m} \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \left( 1 - \frac{\ell}{\sqrt{2}R\sqrt{1 + \cos(\varphi_1 + \varphi_2)}} \right)$$

□

### פתרון סעיף ב'

יהיה נוח יותר לעבוד בקואורדינטות:

$$\phi \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_2, \quad \theta \stackrel{\text{def}}{=} \pi - \varphi_1 - \varphi_2 \implies \varphi_1 = \pi - \theta - \phi, \quad \varphi_2 = \phi$$

כאשר  $\phi$  מודדת את הזווית של המערכת כולה ביחס לציר  $x$ , ואילו  $\theta$  מודדת את הזווית בין שתי המסות. בקואורדינטות אלה האנרגיה הקינטית היא:

$$T = \frac{1}{2} mR^2 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) = \frac{1}{2} mR^2 \left( (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 + \dot{\phi}^2 \right) = \frac{1}{2} mR^2 (\dot{\theta}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\phi} + 2\dot{\phi}^2)$$

לכן הלגראנג'יאן יהיה:

$$L = \frac{1}{2} mR^2 (\dot{\theta}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\phi} + 2\dot{\phi}^2) + kR \left( R \cos \theta + \sqrt{2}\ell \sqrt{1 - \cos \theta} \right)$$

נשים לב כי הפוטנציאל תלוי ב- $\theta$  בלבד. נגזרתו הראשונה היא:

$$V'(\theta) = kR^2 \sin \theta \left( 1 - \frac{\ell}{\sqrt{2}R\sqrt{1 - \cos \theta}} \right)$$

הנגזרת מתאפסת כאשר:

- $\theta = 0$ , כלומר, המסות צמודות אחת לשנייה והקפיץ מכווץ למינימום האורך האפשרי. זוהי בבירור נקודת שיווי-משקל לא-יציבה.
- $\theta = \pi$ , כלומר, המסות נמצאות בנקודות מנוגדות על המעגל. אם נניח כי  $\ell < 2R$ , אז במצב כזה הקפיץ מתוח למקסימום האורך האפשרי, וגם זו נקודת שיווי-משקל לא-יציבה.
- $\theta = \theta_0 \stackrel{\text{def}}{=} \arccos \left( 1 - \frac{\ell^2}{2R^2} \right)$ , כאשר שוב נניח כי  $\ell < 2R$ . במקרה זה מתקיים:

$$V''(\theta) = kR^2 \left( \cos \theta \left( 1 - \frac{\ell}{\sqrt{2}R\sqrt{1 - \cos \theta}} \right) + \frac{\ell \sin^2 \theta}{2\sqrt{2}R(1 - \cos \theta)^{3/2}} \right)$$

כאשר נציב את  $\theta_0$ , המחובר הראשון יתאפס. המחובר השני תמיד חיובי, לכן  $V''(\theta_0) > 0$  ו- $\theta_0$  היא נקודת שיווי-משקל יציבה. □

### פתרון סעיף ג'

אם  $\ell = \sqrt{2}R$ , אז נקודת שיווי-המשקל תהיה  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ . נציב אותה בנגזרת השנייה של הפוטנציאל:

$$V''(\theta_0) = \frac{1}{2} kR^2$$

לפיכך פיתוח טיילור של  $V$  סביב  $\theta_0$  הוא (לאחר התעלמות מקבועים):

$$V(\theta) \approx \frac{1}{4} kR^2 (\theta - \theta_0)^2$$

והלגראנג'יאן המקורב הוא:

□

$$L \approx \frac{1}{2} mR^2 (\dot{\theta}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\phi} + 2\dot{\phi}^2) - \frac{1}{4} kR^2 \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right)^2$$

## פתרון סעיף ד'

נשים לב כי הקואורדינטה  $\phi$  לא מופיעה בלגראנג'יאן, לפיכך:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mR^2 (2\dot{\phi} + \dot{\theta}) = p_\phi = \text{const}$$

ומכאן:

$$\dot{\phi} = \frac{1}{2} \left( \frac{p_\phi}{mR^2} - \dot{\theta} \right)$$

נציב בלגראנג'יאן:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}mR^2 \left( \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{p_\phi}{mR^2} - \dot{\theta} \right)^2 + \dot{\theta} \left( \frac{p_\phi}{mR^2} - \dot{\theta} \right) \right) - \frac{1}{4}kR^2 \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2}mR^2 \left( \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{p_\phi^2}{2m^2R^4} \right) - \frac{1}{4}kR^2 \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right)^2 \\ &\cong \frac{1}{4}mR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{4}kR^2 \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

כאשר בשלב האחרון השמטנו קבוע חיבורי. קיבלנו לגראנג'יאן של אוסילטור הרמוני פשוט עם מסה וקבוע קפיץ:

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}mR^2, \quad K \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}kR^2$$

ומכאן ברור כי תדירות התנודות הקטנות סביב נקודת שיווי המשקל היא:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

מסימטריה, אופן התנודה השני הוא מנוון ומתאים לסיבוב במהירות קבועה של המערכת כולה. לפיכך תדירותו היא  $\omega = 0$ .  $\square$

## פתרון סעיף ה'

מאחר שהלגראנג'יאן שקיבלנו בסעיף הקודם מתאים לאוסילטור הרמוני פשוט המתנודד סביב  $\theta_0 = \frac{1}{2}$ , נוכל לרשום מיד את הפתרון עבור  $\theta$ :

$$\theta(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) + \frac{\pi}{2}$$

כאשר  $C_1, C_2$  קבועים. נזכור כי:

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{2mR^2} - \frac{1}{2}\dot{\theta} = C_3 - \frac{1}{2}\dot{\theta}$$

כאשר  $C_3 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p_\phi}{2mR^2}$  קבוע, לכן:

$$\phi(t) = -\frac{1}{2}C_1 \cos(\omega t) - \frac{1}{2}C_2 \sin(\omega t) + C_3 t + C_4$$

כאשר  $C_4$  קבוע (אשר בלענו את  $\frac{1}{2}$  בתוכו). כעת נוכל לחזור לקואורדינטות המקוריות:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \pi - \theta(t) - \phi(t) \\ &= -\frac{1}{2}C_1 \cos(\omega t) - \frac{1}{2}C_2 \sin(\omega t) - C_3 t - C_4 + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\varphi_2(t) = \phi(t) = -\frac{1}{2}C_1 \cos(\omega t) - \frac{1}{2}C_2 \sin(\omega t) + C_3 t + C_4$$

נציב את תנאי ההתחלה:

$$\begin{aligned}\varphi_1(0) &= -\frac{1}{2}C_1 - C_4 + \frac{\pi}{2} = 0, & \dot{\varphi}_1(0) &= -\frac{1}{2}C_2\omega - C_3 = 0 \\ \varphi_2(0) &= -\frac{1}{2}C_1 + C_4 = A, & \dot{\varphi}_2(0) &= -\frac{1}{2}C_2\omega + C_3 = v\end{aligned}$$

מכאן:

$$C_1 = \frac{\pi}{2} - A, \quad C_2 = -\frac{v}{\omega}, \quad C_3 = \frac{v}{2}, \quad C_4 = \frac{1}{2}\left(A + \frac{\pi}{2}\right)$$

והפתרון המלא יהיה:

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= \frac{1}{2}\left(A - \frac{\pi}{2}\right)\cos(\omega t) + \frac{v}{2\omega}\sin(\omega t) - \frac{v}{2}t - \frac{1}{2}\left(A - \frac{\pi}{2}\right) \\ \varphi_2(t) &= \frac{1}{2}\left(A - \frac{\pi}{2}\right)\cos(\omega t) + \frac{v}{2\omega}\sin(\omega t) + \frac{v}{2}t + \frac{1}{2}\left(A + \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

□ אנו רואים כי, כצפוי, הפתרון מתאים לאוסילטור הרמוני ובמקביל תנועה סיבובית במהירות קבועה.