גלים, אור ואופטיקה: פתרון מבחן מועד א' תשס"ח (14/4/2008)

גרסה 1.0, ינואר 2010

ברק שושני
baraksh@gmail.com | http://baraksh.co.il/

שאלה 1

נתון מיתר התפוס בשני קצותיו: $x=0$ ו־$x=L$. ברגע $t=0$ העתקתו היא

$$\psi\left(x,0\right)=4h\frac{x\left(L-x\right)}{L^2}$$

ומהירותו היא

$$\dot{\psi}\left(x,0\right)=0$$

מתיחות המיתר היא T וצפיפותו האורכית היא μ.

סעיף א'

נכתוב ונסביר בקצרה את תנאי השפה וההתחלה בבעיה.

תנאי השפה הם:

$$\psi\left(0,t\right)=\psi\left(L,t\right)=0$$

משום שהמיתר תפוס בשני קצותיו, ולכן העתקתו שם תהיה תמיד אפס. תנאי ההתחלה הנתונים הם:

$$\psi\left(x,0\right)=4h\frac{x\left(L-x\right)}{L^2},\qquad \dot{\psi}\left(x,0\right)=0$$

והם מייצגים את צורת המיתר ומהירותו ברגע $t=0$.

סעיף ב'

נחשב את האנרגיה ההתחלתית של המיתר ב־$t=0$.

למיתר אין (עדיין) אנרגיה קינטית, כי מהירותו היא אפס. צפיפות האנרגיה הפוטנציאלית היא

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\mathrm{p}} &= \frac{T}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\\ &= \frac{T}{2}\left(4h\frac{L-2x}{L^2}\right)^2\\ &= \frac{8Th^2}{L^4}\left(L-2x\right)^2\end{aligned}$$

לכן האנרגיה על כל המיתר היא

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{p}} &= \int_0^L \mathcal{E}_{\mathrm{p}} \mathrm{d}x \\ &= \int_0^L \frac{8Th^2}{L^4} (L-2x)^2 \mathrm{d}x \\ & \left[u = L-2x \Longrightarrow \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\mathrm{d}u\right] \\ &= \frac{4Th^2}{L^4} \int_{-L}^{L} u^2 \mathrm{d}u \\ &= \frac{4Th^2}{3L^4} u^3 \bigg|_{-L}^{L} \\ &= \frac{8Th^2}{3L} \end{aligned}$$

בדיקת יחידות:

$$E = [\mathrm{J}] = \left[\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}\right]$$

$$\frac{8Th^2}{3L} = \frac{\left[\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}\right][\mathrm{m}]^2}{[\mathrm{m}]} = \left[\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}\right]$$

ואכן קיבלנו התאמה.

סעיף ג'

נחשב את האנרגיה הקינטית והפוטנציאלית הממוצעות האגורות בכל אחד מאופני התנודה.

אופן תנודה כללי הוא מהצורה:

$$\psi_n(x,t) = [A_n \cos(k_n x) + B_n \sin(k_n x)] \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n t}$$

נציב את תנאי השפה:

$$\begin{aligned} &\psi_n(0,t) = 0 \\ \Rightarrow &A_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n t} = 0 \\ \Rightarrow &A_n = 0 \end{aligned}$$

משום ש־$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n t} \neq 0$ לכל t. בנוסף:

$$\begin{aligned} &\psi_n(L,t) = 0 \\ \Rightarrow &B_n \sin(k_n L) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n t} = 0 \\ \Rightarrow &\sin(k_n L) = 0 \\ \Rightarrow &k_n L = \pi n \\ \Rightarrow &k_n = \frac{\pi n}{L} \end{aligned}$$

משום שלא ייתכן כי $B_n = 0$ - במקרה זה, אופן התנודה כולו יהיה טריוויאלי (אפס). בסה"כ קיבלנו

$$\begin{aligned} \psi_n(x,t) &= B_n \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n t} \\ &= \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) [C_n \cos(\omega_n t) + D_n \sin(\omega_n t)] \end{aligned}$$

כאשר המרנו מפתרון מרוכב לפתרון ממשי לשם הפשטות, ו"בלענו" את B_n במקדמים C_n, D_n. לבסוף נשתמש בתנאי ההתחלה:

$$\begin{aligned} &\dot{\psi}(x,0) = 0 \\ \Rightarrow &\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \omega_n D_n = 0 \\ \Rightarrow &D_n = 0 \end{aligned}$$

ונקבל:

$$\psi_n(x,t) = C_n \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)\cos(\omega_n t)$$

כעת נותר רק למצוא את המקדמים C_n. לשם כך יש להשתמש בתנאי ההתחלה הנותר:

$$\begin{aligned}
&\psi(x,0) = 4h\frac{x(L-x)}{L^2}\\
\Rightarrow &C_n \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) = 4h\frac{x(L-x)}{L^2}\\
\Rightarrow &C_n \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right) = 4h\frac{x(L-x)}{L^2}\sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right)\\
\Rightarrow &\int_0^L C_n \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right)\mathrm{d}x = \int_0^L 4h\frac{x(L-x)}{L^2}\sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right)\mathrm{d}x\\
\Rightarrow &C_n\delta_{nm}\frac{L}{2} = \frac{4h}{L^2}\int_0^L x(L-x)\sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right)\mathrm{d}x\\
\Rightarrow &C_m\frac{L}{2} = \frac{4h}{L^2}\cdot\left(\frac{\pi m}{L}\right)^{-3}\left[2-2\cos(\pi m)-\pi m\sin(\pi m)\right]\\
\Rightarrow &C_m\frac{L}{2} = \frac{4hL}{\pi^3 m^3}\left[2-2(-1)^m\right]\\
\Rightarrow &C_m = \frac{16h}{\pi^3 m^3}\left[1-(-1)^m\right]
\end{aligned}$$

כאשר השתמשנו באינטגרל הנתון בשאלה. מכאן

$$C_n = \begin{cases} \frac{32h}{\pi^3 n^3} & n \text{ odd}\\ 0 & n \text{ even}\end{cases}$$

יחס הנפיצה הוא

$$\omega_n = k_n v = \frac{\pi n}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

כפי שאפשר לראות בקלות מהצבת הפתרון שקיבלנו במשוואת הגלים. לכן נוכל לרשום:

$$\psi_n(x,t) = \begin{cases} \frac{32h}{\pi^3 n^3}\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)\cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}t\right) & n \text{ odd}\\ 0 & n \text{ even}\end{cases}$$

והפתרון המלא הוא:

$$\psi(x,t) = \sum_{n \text{ odd}} \frac{32h}{\pi^3 n^3}\sin(k_n x)\cos(\omega_n t)$$

כאשר

$$k_n = \frac{\pi n}{L}, \qquad \omega_n = \frac{\pi n}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

כעת, צפיפות האנרגיה הפוטנציאלית האגורה בכל אופן תנודה בעל n אי־זוגי היא:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\mathrm{p},n} &= \frac{T}{2}\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial x}\right)^2\\
&= \frac{T}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{32h}{\pi^3 n^3}\sin(k_n x)\cos(\omega_n t)\right)\right]^2\\
&= \frac{T}{2}\left[k_n\frac{32h}{\pi^3 n^3}\cos(k_n x)\cos(\omega_n t)\right]^2\\
&= \frac{T}{2}k_n^2\frac{32^2 h^2}{\pi^6 n^6}\cos^2(k_n x)\cos^2(\omega_n t)\\
&= \frac{2^9 h^2 T}{\pi^6 n^6}\frac{\pi^2 n^2}{L^2}\cos^2(k_n x)\cos^2(\omega_n t)\\
&= \frac{2^9 h^2 T}{\pi^4 n^4 L^2}\cos^2(k_n x)\cos^2(\omega_n t)
\end{aligned}$$

ולכן האנרגיה הפוטנציאלית היא:

$$\begin{aligned}
E_{\mathrm{p},n} &= \int_0^L \mathcal{E}_{\mathrm{p},n}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^L \frac{2^9 h^2 T}{\pi^4 n^4 L^2}\cos^2\left(k_n x\right)\cos^2\left(\omega_n t\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{2^9 h^2 T}{\pi^4 n^4 L^2}\cos^2\left(\omega_n t\right)\int_0^L \cos^2\left(k_n x\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{2^9 h^2 T}{\pi^4 n^4 L^2}\cos^2\left(\omega_n t\right)\int_0^L \frac{1+\cos\left(2k_n x\right)}{2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{2^8 h^2 T}{\pi^4 n^4 L^2}\cos^2\left(\omega_n t\right)\left[x+\frac{\sin\left(2k_n x\right)}{2k_n}\Bigg|_{x=0}^{L}\right] \\
&= \frac{2^8 h^2 T}{\pi^4 n^4 L^2}\cos^2\left(\omega_n t\right)\left[L+\frac{\sin\left(2k_n L\right)}{2k_n}\right] \\
&= \frac{2^8 h^2 T}{\pi^4 n^4 L^2}\cos^2\left(\omega_n t\right)\left[L+\frac{\sin\left(2\pi n\right)}{2k_n}\right] \\
&= \frac{2^8 h^2 T}{\pi^4 n^4 L}\cos^2\left(\omega_n t\right)
\end{aligned}$$

כאשר ברור כי עבור n זוגי האנרגיה מתאפסת. בדומה, צפיפות האנרגיה הקינטית עבור n אי־זוגי היא:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\mathrm{k},n} &= \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial t}\right)^2 \\
&= \frac{\mu}{2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{32h}{\pi^3 n^3}\sin\left(k_n x\right)\cos\left(\omega_n t\right)\right)\right]^2 \\
&= \frac{\mu}{2}\left[-\omega_n\frac{32h}{\pi^3 n^3}\sin\left(k_n x\right)\sin\left(\omega_n t\right)\right]^2 \\
&= \frac{\mu}{2}\omega_n^2\frac{32^2 h^2}{\pi^6 n^6}\sin^2\left(k_n x\right)\sin^2\left(\omega_n t\right) \\
&= \mu\frac{\pi^2 n^2}{L^2}\frac{T}{\mu}\frac{2^9 h^2}{\pi^6 n^6}\sin^2\left(k_n x\right)\sin^2\left(\omega_n t\right) \\
&= \frac{2^9 h^2 T}{\pi^4 n^4 L^2}\sin^2\left(k_n x\right)\sin^2\left(\omega_n t\right)
\end{aligned}$$

ולכן האנרגיה הקינטית היא:

$$\begin{aligned}
E_{\mathrm{k},n} &= \int_0^L \mathcal{E}_{\mathrm{k},n}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^L \frac{2^9 h^2 T}{\pi^4 n^4 L^2}\sin^2\left(k_n x\right)\sin^2\left(\omega_n t\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{2^9 h^2 T}{\pi^4 n^4 L^2}\sin^2\left(\omega_n t\right)\int_0^L \sin^2\left(k_n x\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{2^9 h^2 T}{\pi^4 n^4 L^2}\sin^2\left(\omega_n t\right)\int_0^L \frac{1-\cos\left(2k_n x\right)}{2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{2^8 h^2 T}{\pi^4 n^4 L^2}\sin^2\left(\omega_n t\right)\left[x-\frac{\sin\left(2k_n x\right)}{2k_n}\Bigg|_{x=0}^{L}\right] \\
&= \frac{2^8 h^2 T}{\pi^4 n^4 L^2}\sin^2\left(\omega_n t\right)\left[L-\frac{\sin\left(2k_n L\right)}{2k_n}\right] \\
&= \frac{2^8 h^2 T}{\pi^4 n^4 L^2}\sin^2\left(\omega_n t\right)\left[L-\frac{\sin\left(2\pi n\right)}{2k_n}\right] \\
&= \frac{2^8 h^2 T}{\pi^4 n^4 L}\sin^2\left(\omega_n t\right)
\end{aligned}$$

כאשר שוב, עבור n זוגי האנרגיה מתאפסת. התשובות הסופיות הן:

$$E_{\mathrm{p},n}(t)=\begin{cases}\frac{2^8h^2T}{\pi^4n^4L}\cos^2(\omega_n t) & n\text{ odd}\\ & n\text{ even}\end{cases}$$

$$E_{\mathrm{k},n}(t)=\begin{cases}\frac{2^8h^2T}{\pi^4n^4L}\sin^2(\omega_n t) & n\text{ odd}\\ & n\text{ even}\end{cases}$$

סעיף ד'

מדרישת שימור האנרגיה ההתחלתית, נקבל את הזהות הבאה:

$$\sum_{n\text{ odd}}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{96}$$

אכן, נזכור כי בסעיף ב' קיבלנו

$$E_{\mathrm{p}}(0)=\frac{8h^2T}{3L}$$

אבל

$$\begin{aligned}E_{\mathrm{p}}(0) &= \sum_{n\text{ odd}}E_{\mathrm{p},n}(0)\\ &= \sum_{n\text{ odd}}\frac{2^8h^2T}{\pi^4n^4L}\\ &= \frac{2^8h^2T}{\pi^4L}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^4}\end{aligned}$$

ולכן, משימור האנרגיה נקבל:

$$\begin{aligned}&\frac{2^8h^2T}{\pi^4L}\sum_{n\text{ odd}}\frac{1}{n^4}=\frac{8h^2T}{3L}\\ &\Rightarrow\frac{2^8}{\pi^4}\sum_{n\text{ odd}}\frac{1}{n^4}=\frac{8}{3}\\ &\Rightarrow\sum_{n\text{ odd}}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{96}\end{aligned}$$

כנדרש. נעיר כי ניתן לקבל באופן טריוויאלי

$$\begin{aligned}E_{\mathrm{k}}(0) &= \sum_{n\text{ odd}}E_{\mathrm{k},n}(0)\\ &= \sum_{n\text{ odd}}\frac{2^8h^2T}{\pi^4n^4L}\sin^2(\omega_n t)\Big|_{t=0}\\ &= 0\end{aligned}$$

בהתאמה לכך שהאנרגיה הקינטית ההתחלתית היא אפס.

שאלה 2

נתון מיתר בעל מתיחות T וצפיפות אורכית μ. על המיתר פועל כוח מרסן יחסי למהירות:

$$F\left(x,t\right)=-\gamma\mu\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

כאשר γ הוא מקדם הריסון.

סעיף א'

נכתוב את משוואת הגלים הכוללת את איבר הריסון.

משוואת הגלים הרגילה היא

$$\frac{\partial^{2}\psi}{\partial t^{2}}=v^{2}\frac{\partial^{2}\psi}{\partial x^{2}}$$

הכוח המרסן הוא

$$F\left(x,t\right)=-\gamma\mu\frac{\partial\psi}{\partial t}=m\frac{\partial^{2}\psi}{\partial t^{2}}$$

ומכאן נקבל

$$\frac{\partial^{2}\psi}{\partial t^{2}}=-\frac{\gamma\mu}{m}\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

נשים לב כי

$$\mu=\frac{m}{L}$$

כאשר L הוא אורך המיתר. מכאן

$$\frac{\gamma\mu}{m}\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{\gamma}{L}\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

כעת, המשוואה המלאה תהיה סופרפוזיציה של המשוואה המקורית עם הביטוי לכוח המרסן:

$$\frac{\partial^{2}\psi}{\partial t^{2}}=v^{2}\frac{\partial^{2}\psi}{\partial x^{2}}-\frac{\gamma}{L}\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

סעיף ב'

נוכיח שגל הרמוני בעל יחס נפיצה $\omega\left(k\right)$ פותר את משוואת הגלים, ונקבל את יחס הנפיצה המתאים למערכת.

אכן, נציב גל הרמוני מהצורה:

$$\psi\left(x,t\right)=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(kx-\omega t\right)}$$

ונקבל:

$$\begin{aligned}&-\omega^{2}A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(kx-\omega(k)t\right)}=-k^{2}v^{2}A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(kx-\omega(k)t\right)}+\mathrm{i}\frac{\gamma}{L}\omega A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(kx-\omega(k)t\right)}\\&\Rightarrow\omega^{2}+\mathrm{i}\frac{\gamma}{L}\omega-k^{2}v^{2}=0\end{aligned}$$

זוהי משוואה ריבועית אשר פתרונותיה הם:

$$\begin{aligned}\omega_{1,2}&=\frac{1}{2}\left(-\mathrm{i}\frac{\gamma}{L}\pm\sqrt{\left(\mathrm{i}\frac{\gamma}{L}\right)^{2}+4k^{2}v^{2}}\right)\\&=-\mathrm{i}\frac{\gamma}{2L}\pm\sqrt{k^{2}v^{2}-\frac{\gamma^{2}}{4L^{2}}}\end{aligned}$$

אם מתקיים יחס נפיצה זה, הרי שהגל ההרמוני הנ"ל פותר את משוואת הגלים.

סעיף ג'

נמצא תנאי על מספר הגל k כדי שהגל יתקדם לאורך המיתר.

ראינו בסעיף ב' כי יחס הנפיצה הוא:

$$\omega_{1,2}=-\mathrm{i}\frac{\gamma}{2L}\pm\sqrt{k^2v^2-\frac{\gamma^2}{4L^2}}$$

נרשום

$$\omega=a+\mathrm{i}b$$

אז

$$\begin{aligned}\psi\left(x,t\right) &= A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}\\ &= A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-(a+\mathrm{i}b)t)}\\ &= A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-at-\mathrm{i}bt)}\\ &= A\mathrm{e}^{bt}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-at)}\end{aligned}$$

מכאן רואים כי תנאי לכך שהגל יתקדם לאורך המיתר הוא $a\neq 0$, כלומר ל־ω חייב להיות חלק ממשי. זה יקרה רק כאשר הביטוי שבתוך השורש יהיה חיובי:

$$k^2v^2-\frac{\gamma^2}{4L^2}>0\Longrightarrow k^2v^2>\frac{\gamma^2}{4L^2}\Longrightarrow k>\frac{\gamma}{2vL}$$

כלומר כאשר מספר הגל מקיים

$$k>\frac{\gamma}{2vL}$$

הגל יתקדם לאורך המיתר.

בדיקת יחידות:

$$\gamma=\frac{F}{\mu\dot{\psi}}=\frac{\left[\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}\right]}{\left[\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-1}\right]\left[\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\right]}=\left[\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\right]$$

$$k=\left[\mathrm{m}^{-1}\right]$$

$$\frac{\gamma}{2vL}=\frac{\left[\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\right]}{\left[\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\right]\left[\mathrm{m}\right]}=\left[\mathrm{m}^{-1}\right]$$

ואכן קיבלנו התאמה.

סעיף ד'

נדון בחלק הממשי והמדומה של יחס הנפיצה, ונשרטט בצורה סכמתית את החלק הממשי.

ראינו כי אם

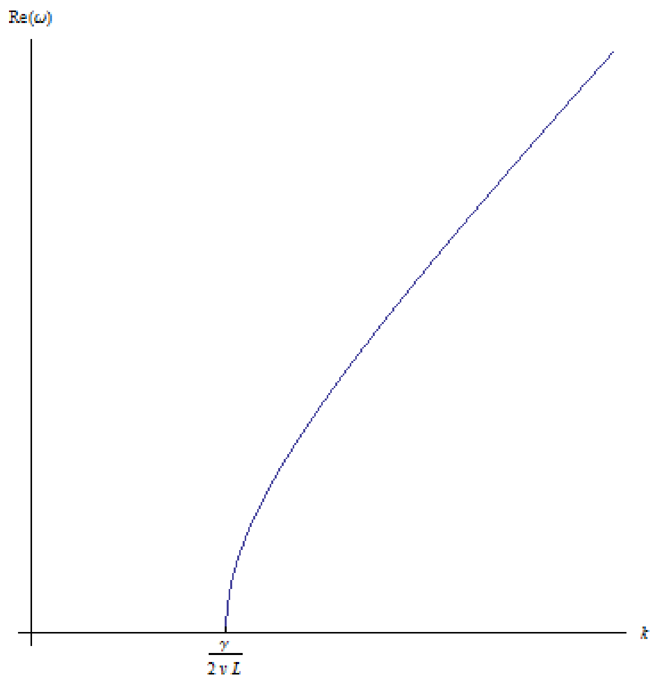
$$\omega=a+\mathrm{i}b$$

אז

$$\psi\left(x,t\right)=A\mathrm{e}^{bt}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-at)}$$

כלומר החלק הממשי הוא המהירות הזוויתית, ואילו החלק המדומה תורם לדעיכה אקספוננציאלית של הגל עם הזמן. (b חייב להיות שלילי, כמובן, אחרת נקבל פתרון לא־פיזיקלי)

להלן שרטוט סכמתי של החלק הממשי:



סעיף ה'

נחשב את מהירות הפאזה ואת מהירות החבורה במיתר זה. נמצא מי משתי המהירויות גדולה יותר, ומהו גודלן ביחס למהירות הגל על אותו מיתר ללא ריסון.

מהירות הפאזה היא:

$$v_\phi = \frac{\mathfrak{Re}\omega}{k} = \frac{\pm\sqrt{k^2v^2 - \frac{\gamma^2}{4L^2}}}{k} = \pm\sqrt{v^2 - \frac{\gamma^2}{4L^2k^2}}$$

ומהירות החבורה היא:

$$v_\mathrm{g} = \frac{\mathrm{d}\mathfrak{Re}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left[\pm\sqrt{k^2v^2 - \frac{\gamma^2}{4L^2}}\right] = \pm\frac{2kv^2}{2\sqrt{k^2v^2 - \frac{\gamma^2}{4L^2}}} = \pm\frac{v^2}{\sqrt{v^2 - \frac{\gamma^2}{4L^2k^2}}}$$

ניקח את הערכים החיוביים ונקבל:

$$v_\phi = \sqrt{v^2 - \left(\frac{\gamma}{2Lk}\right)^2}, \qquad v_\mathrm{g} = \frac{v^2}{\sqrt{v^2 - \left(\frac{\gamma}{2Lk}\right)^2}}$$

כעת, ביחס למהירות ללא ריסון v, מתקיים

$$v_\phi = \sqrt{v^2 - \left(\frac{\gamma}{2Lk}\right)^2} < v, \qquad v_\mathrm{g} = \frac{v^2}{\sqrt{v^2 - \left(\frac{\gamma}{2Lk}\right)^2}} > \frac{v^2}{v} = v$$

כלומר

$$v_\phi < v < v_\mathrm{g}$$

שאלה 3

נתונה תיבת תהודה בעלת חתך מלבני $a \times b$, אך אינסופית במימד השלישי. אמפליטודת הגל מתאפסת על דפנות התיבה ומקיימת את משוואת הגלים:

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

בנוסף נתון:[1]

$$v = 3 \times 10^4 \,\mathrm{cm} \cdot \mathrm{s}^{-1}, \qquad b = 5 \,\mathrm{cm}, \qquad a = 10 \,\mathrm{cm}$$

סעיף א'

נמצא את יחס הנפיצה עבור גל שמתקדם לאורך הציר האינסופי של התיבה.

נניח כי בציר x התיבה היא באורך a, בציר y באורך b ובציר z התיבה אינסופית. פתרון כללי לגל בתיבה הוא סופרפוזיציה של גלים עומדים במישור xy וגל נע במישור z:

$$\psi_{nm}(\mathbf{r}, t) = \left[A_n \cos(k_n x) + B_n \sin(k_n x)\right]\left[C_m \cos(k_m y) + D_m \sin(k_m y)\right] E \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega_{nm} t)}$$

תנאי השפה הם:

$$\psi_{nm}(0, y, z, t) = \psi_{nm}(a, y, z, t) = \psi_{nm}(x, 0, z, t) = \psi_{nm}(x, b, z, t) = 0$$

בכיוון x נקבל:

$$\begin{aligned} &\psi_{nm}(0, y, z, t) = 0 \\ \Rightarrow &A_n \left[C_m \cos(k_m y) + D_m \sin(k_m y)\right] E \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega_{nm} t)} = 0 \\ \Rightarrow &A_n = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\psi_{nm}(a, y, z, t) = 0 \\ \Rightarrow &B_n \sin(k_n a) \left[C_m \cos(k_m y) + D_m \sin(k_m y)\right] E \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega_{nm} t)} = 0 \\ \Rightarrow &B_n \sin(k_n a) = 0 \\ \Rightarrow &k_n a = \pi n \\ \Rightarrow &k_n = \frac{\pi n}{a} \end{aligned}$$

ומכאן

$$\psi_{nm}(\mathbf{r}, t) = B_n \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right)\left[C_m \cos(k_m y) + D_m \sin(k_m y)\right] E \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega_{nm} t)}$$

באופן אנלוגי לחלוטין נקבל לאחר הפעלת תנאי השפה בכיוון y:

$$\psi_{nm}(\mathbf{r}, t) = B_n \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) D_m \sin\left(\frac{\pi m}{b} y\right) E \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega_{nm} t)}$$

או

$$\begin{aligned} \psi_{nm}(\mathbf{r}, t) &= B_n \sin(k_n x) D_m \sin(k_m y) E \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega_{nm} t)} \\ &= A_{nm} \sin(k_n x) \sin(k_m y) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega_{nm} t)} \end{aligned}$$

כאשר

$$k_n = \frac{\pi n}{a}, \qquad k_m = \frac{\pi m}{b}, \qquad A_{nm} = B_n D_m E$$

כעת, יחס הנפיצה הוא (כפי שאפשר לראות בקלות באמצעות הצבת הפתרון במשוואת הגלים הנתונה):

$$\begin{aligned} \omega_{nm} &= v\sqrt{k_n^2 + k_m^2 + k_z^2} \\ &= v\sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 + k_z^2} \end{aligned}$$

[1] הערכים המספריים לא מוסיפים שום דבר מהותי לשאלה, לכן לא טרחתי להציב אותם כדי לקבל תשובה מספרית בסוף כל סעיף. בכל מקרה, כמו בכל שאלה בפיזיקה, גם כאן הרבה יותר נוח ומסודר לעבוד בצורה סימבולית, לקבל תשובה כללית שאינה תלויה במספרים הספציפיים הנתונים ושניתן להסיק ממנה מידע כללי לגבי התנהגות המערכת, ורק אז להציב את המספרים אם יש צורך בתשובה מספרית.

סעיף ב'

נמצא את תדירות הסף ω_c, התדירות המינימלית הנדרשת על־מנת שגלים יתקדמו בתיבה.

מיחס הנפיצה נקבל:

$$\omega_{nm}^2 = v^2\left[\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 + k_z^2\right]$$
$$\Rightarrow k_z = \sqrt{\frac{\omega_{nm}^2}{v^2} - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2}$$

נרשום

$$k_z = a + \mathrm{i}b$$

אז

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega_{nm} t)} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}((a+\mathrm{i}b)z - \omega_{nm} t)} \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(az + \mathrm{i}bz - \omega_{nm} t)} \\ &= \mathrm{e}^{-bz}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(az - \omega_{nm} t)} \end{aligned}$$

מכאן ברור כי החלק הממשי של k_z תורם להתקדמות הגל בכיוון ציר z, ואילו החלק המדומה של k_z גורם להנחתת האמפליטודה כפונקציה של המיקום בציר z. כדי שהגל יתקדם, נדרוש ש־k_z יהיה ממשי טהור; לשם כך יש לדרוש כי הביטוי בתוך השורש יהיה חיובי:

$$\frac{\omega_{nm}^2}{v^2} - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 > 0$$
$$\Rightarrow \omega_{nm} > v\sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2}$$

כל תדירות המקיימת את אי־השוויון הנ"ל תניב מספר־גל k_z ממשי טהור, ולכן הגל יתקדם בתיבה. התדירות **המינימלית** הנדרשת היא התדירות המתאימה ל־$n = m = 1$:

$$\omega_c = v\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}$$

סעיף ג'

נמצא את מהירות הפאזה ומהירות החבורה עבור גל עם תדירות $\omega_a = \sqrt{\frac{7}{5}}\omega_c$.

ראשית נשים לב כי:

$$\begin{aligned} k_z &= \sqrt{\frac{\omega_a^2}{v^2} - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{7\omega_c^2}{5v^2} - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{7}{5}\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2\right] - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{7}{5} - n^2\right)\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{7}{5} - m^2\right)\left(\frac{\pi}{b}\right)^2} \end{aligned}$$

מאחר שאנו רוצים לקבל k_z ממשי, נדרוש

$$\frac{7}{5} - n^2 > 0, \qquad \frac{7}{5} - m^2 > 0$$

ברור כי n,m היחידים שמקיימים את הנדרש הם $n=m=1$, ומכאן שאופן התנודה היחיד המתאים לתדירות זו הוא ψ_{11}.
עבור אופן זה מתקיים:

$$\begin{aligned} k_z &= \sqrt{\left(\frac{7}{5}-1\right)\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{7}{5}-1\right)\left(\frac{\pi}{b}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{2}{5}}\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2} \\ &= \frac{\omega_c}{v}\sqrt{\frac{2}{5}} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{5}{7}}\omega_a}{v}\sqrt{\frac{2}{5}} \\ &= \frac{\omega_a}{v}\sqrt{\frac{2}{7}} \end{aligned}$$

מכאן, מהירות הפאזה היא:

$$v_\phi = \frac{\omega_a}{k_z} = \frac{\omega_a}{\frac{\omega_a}{v}\sqrt{\frac{2}{7}}} = v\sqrt{\frac{7}{2}}$$

בנוסף, נזכור כי

$$\omega_c = v\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2+k_z^2}$$

לכן מהירות החבורה היא:

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{g}} &= \frac{\mathrm{d}\omega_a}{\mathrm{d}k_z} \\ &= v\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2+k_z^2}}\cdot 2k_z \\ &= v\frac{k_z}{\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2+k_z^2}} \\ &= v\frac{\sqrt{\frac{2}{5}}\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2+\frac{2}{5}\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2\right]}} \\ &= v\frac{\sqrt{\frac{2}{5}}\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2}}{\sqrt{\frac{7}{5}}\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2}} \\ &= v\sqrt{\frac{2}{7}} \end{aligned}$$

בונוס

נמצא את עומק החדירה (המרחק בו אמפליטודת הגל דועכת ל-$\frac{1}{\mathrm{e}}$ מערכה המקורי) עבור גל בתדירות $\omega_b=\sqrt{\frac{3}{5}}\omega_c$.

כמו בסעיף הקודם, נשים לב כי:

$$k_z = \sqrt{\left(\frac{3}{5}-n^2\right)\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{3}{5}-m^2\right)\left(\frac{\pi}{b}\right)^2}$$

הפעם, כל בחירה של n,m תניב גל דועך. אנו נבחר $n=m=1$ ונקבל:

$$\begin{aligned}
k_z &= \sqrt{\left(\frac{3}{5}-1\right)\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{3}{5}-1\right)\left(\frac{\pi}{b}\right)^2} \\
&= \sqrt{-\frac{2}{5}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2-\frac{2}{5}\left(\frac{\pi}{b}\right)^2} \\
&= \mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{5}}\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2} \\
&= \mathrm{i}\frac{\omega_c}{v}\sqrt{\frac{2}{5}}
\end{aligned}$$

נזכור כי הפתרון לגל נע הוא:

$$\psi_{nm}\left(\mathbf{r},t\right)=A_{nm}\sin\left(k_n x\right)\sin\left(k_m y\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(k_z z-\omega_{nm}t\right)}$$

כאשר

$$k_n=\frac{\pi n}{a},\qquad k_m=\frac{\pi m}{b}$$

במקרה שלנו $n=m=1$ והתדירות היא ω_b, לכן הפתרון הוא

$$\psi\left(\mathbf{r},t\right)=A\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(k_z z-\omega_b t\right)}$$

נציב את הערך של k_z שמצאנו ונקבל

$$\begin{aligned}
\psi\left(\mathbf{r},t\right) &= A\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\mathrm{i}\frac{\omega_c}{v}\sqrt{\frac{2}{5}}z-\omega_b t\right)} \\
&= A\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{-\frac{\omega_c}{v}\sqrt{\frac{2}{5}}z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_b t}
\end{aligned}$$

נתבונן באיבר הדועך:

$$\mathrm{e}^{-\frac{\omega_c}{v}\sqrt{\frac{2}{5}}z}$$

כאשר הביטוי במעריך יהיה שווה ל־-1, האמפליטודה תדעך ל־$\frac{1}{\mathrm{e}}$ מערכה ב־$z=0$:

$$-\frac{\omega_c}{v}\sqrt{\frac{2}{5}}z=-1\Longrightarrow z=\frac{v}{\omega_c}\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{v}{v\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2}}\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2}}$$

מכאן, עומק החדירה הוא

$$z=\frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2}}$$

שאלה 4

אור המכיל שני אורכי גל שונים λ_1, λ_2 פוגע בסריג עקיפה S1. בזווית $\phi = 15^\circ$ מתלכד המקסימום מסדר n של האור בעל אורך הגל λ_1 עם המקסימום מסדר $n+1$ של האור בעל אורך גל λ_2. כדי להפריד בין שני אורכי הגל, מציבים סריג שני S2 בעל צפיפות של 5000 חריצים למילימטר (כלומר, המרחק בין שני חריצים סמוכים הוא $d = \frac{1}{5000\,\mathrm{mm}^{-1}} = 0.0002\,\mathrm{mm} = 2\,\mu\mathrm{m}$). נקודת המקסימום מסדר ראשון של λ_1 מתקבלת על המסך בזווית $\theta_1 = 19^\circ$ ושל λ_2 בזווית $\theta_2 = 16.2^\circ$.

סעיף א'

נמצא את λ_1 ו־λ_2.

ידוע כי תבנית העקיפה של סריג בעל $N = 5000$ סדקים במרחק $d = 2\,\mu\mathrm{m}$ אחד מהשני וברוחב זניח מתוארת ע"י:

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}N\delta\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\delta\right)}$$

כאשר

$$\delta = kd\sin\theta = \frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta$$

כעת, ידוע כי נקודות המקסימום מתקבלות כאשר $\delta = 2\pi m$ עבור $m \in \mathbb{Z}$. נקודת המקסימום מסדר ראשון מתאימה ל־$m = 1$ ואז:

$$\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta = 2\pi \Longrightarrow \lambda = d\sin\theta$$

מכאן נקבל:

$$\lambda_1 = d\sin\theta_1 \approx 6.51 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}$$

$$\lambda_2 = d\sin\theta_2 \approx 5.58 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}$$

סעיף ב'

נקבל את הסדר n בבעיה.

נסמן ב־b את קבוע הסריג הראשון. נקודת המקסימום מסדר n מתקבלת כאשר $\delta = 2\pi n$, כלומר:

$$\frac{2\pi}{\lambda_1}b\sin\phi = 2\pi n \Longrightarrow \sin\phi = \frac{n\lambda_1}{b}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda_2}b\sin\phi = 2\pi(n+1) \Longrightarrow \sin\phi = \frac{(n+1)\lambda_2}{b}$$

מכאן:

$$\frac{n\lambda_1}{b} = \frac{(n+1)\lambda_2}{b}$$
$$\Rightarrow n = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \approx 6$$