

הסתברות למדעים: פתרון מבחן מועד ב' תש"ע (20/8/2010)

גרסה 1.1, ינואר 2010

ברק שושני

baraksh@gmail.com | <http://baraksh.co.il/>

חלק א'

שאלה 1

פונקציית הצפיפות המשותפת של X, Y היא:

$$f_{X,Y}(x,y) = c(5-x-y) \mathcal{I}_{1 \leq x \leq 2} \mathcal{I}_{0 \leq y \leq 3}$$

כאשר \mathcal{I} הוא אינדיקטור.

א. מהו c ?

ב. מהן הצפיפויות השוליות של X, Y ?

ג. חשבו את $P(XY \leq 2)$.

ד. חשבו את $P(X - Y \leq 0.5)$.

ה. חשבו את $E(X + 2Y)$.

פתרון סעיף א'

מתנאי הנורמליזציה:

$$\begin{aligned} 1 &= \iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y) d(x,y) \\ &= c \int_{y=0}^3 dy \int_{x=1}^2 (5-x-y) dx \\ &= c \int_{y=0}^3 \left(5x - \frac{1}{2}x^2 - xy \right) \Big|_{x=1}^2 dy \\ &= c \int_{y=0}^3 \left((10 - 2 - 2y) - \left(5 - \frac{1}{2} - y \right) \right) dy \\ &= c \int_{y=0}^3 \left(\frac{7}{2} - y \right) dy \\ &= c \left(\frac{7}{2}y - \frac{1}{2}y^2 \right) \Big|_{y=0}^3 \\ &= c \left(\frac{21}{2} - \frac{9}{2} \right) \\ &= 6c \end{aligned}$$

□

לפיכך $c = \frac{1}{6}$ **פתרון סעיף ב'**

לפי סעיף א', הצפיפות המשותפת היא:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{6}(5-x-y) \mathcal{I}_{1 \leq x \leq 2} \mathcal{I}_{0 \leq y \leq 3}$$

לכן הצפיפויות השוליות הן:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y) dy \\ &= \frac{1}{6} \mathcal{I}_{1 \leq x \leq 2} \int_0^3 (5-x-y) dy \\ &= \frac{1}{6} \mathcal{I}_{1 \leq x \leq 2} \left(5y - xy - \frac{1}{2}y^2 \right) \Big|_0^3 \\ &= \frac{1}{6} \mathcal{I}_{1 \leq x \leq 2} \left(15 - 3x - \frac{9}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} (7 - 2x) \mathcal{I}_{1 \leq x \leq 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y) dx \\ &= \frac{1}{6} \mathcal{I}_{0 \leq y \leq 3} \int_1^2 (5-x-y) dx \\ &= \frac{1}{6} \mathcal{I}_{0 \leq y \leq 3} \left(5x - \frac{1}{2}x^2 - xy \right) \Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{6} \mathcal{I}_{0 \leq y \leq 3} \left((10 - 2 - 2y) - \left(5 - \frac{1}{2} - y \right) \right) \\ &= \frac{1}{12} (7 - 2y) \mathcal{I}_{0 \leq y \leq 3} \end{aligned}$$

□

פתרון סעיף ג'

ההסתברות היא:

$$\begin{aligned} P(XY \leq 2) &= P\left(Y \leq \frac{2}{X}\right) \\ &= \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{2/x} f_{X,Y}(x,y) dy dx \\ &= \frac{1}{6} \int_{x=1}^2 \int_{y=0}^{2/x} (5-x-y) dy dx \\ &= \frac{1}{6} \int_{x=1}^2 \left((5-x)y - \frac{1}{2}y^2 \right) \Big|_{y=0}^{2/x} dx \\ &= \frac{1}{6} \int_{x=1}^2 \left(\frac{10}{x} - 2 - \frac{2}{x^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{6} \left(10 \ln x - 2x + \frac{2}{x} \right) \Big|_{x=1}^2 \\ &= \frac{1}{6} ((10 \ln 2 - 4 + 1) - (0 - 2 + 2)) \\ &= \frac{5}{3} \ln 2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

□

פתרון סעיף ד'

אנו מעוניינים לעשות אינטגרציה של פונקציית הצפיפות על הקבוצה:

$$\left\{ x - y \leq \frac{1}{2} \cap 1 \leq x \leq 2 \cap 0 \leq y \leq 3 \right\}$$

קבוצה זו היא החלק של המלבן $[1, 2] \times [0, 3]$ שנמצא מעל לקו $y = x - \frac{1}{2}$. זהו טרפז, הניתן לתיאור באמצעות הפרמטריזציה:

$$\left\{ 1 \leq x \leq 2 \cap x - \frac{1}{2} \leq y \leq 3 \right\}$$

כדי לפשט את החישוב, נחשב דווקא את ההסתברות של הקבוצה המשלימה:

$$\left\{ 1 \leq x \leq 2 \cap 0 \leq y \leq x - \frac{1}{2} \right\}$$

(כך, אחד מהגבולות באינטגרל יהיה 0). אם כן:

$$\begin{aligned} 1 - P\left(X - Y \leq \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{6} \int_{x=1}^2 \int_{y=0}^{x-1/2} (5-x-y) dy dx \\ &= \frac{1}{6} \int_{x=1}^2 \left((5-x)y - \frac{1}{2}y^2 \right) \Big|_{y=0}^{x-1/2} dx \\ &= \frac{1}{6} \int_{x=1}^2 \left((5-x) \left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \right) dx \\ &= \frac{1}{6} \int_{x=1}^2 \left(5x - \frac{5}{2} - x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8} \right) dx \\ &= \frac{1}{6} \int_{x=1}^2 \left(-\frac{3}{2}x^2 + 6x - \frac{21}{8} \right) dx \\ &= \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - \frac{21}{8}x \right) \Big|_{x=1}^2 \\ &= \frac{1}{6} \left(\left(-4 + 12 - \frac{21}{4} \right) - \left(-\frac{1}{2} + 3 - \frac{21}{8} \right) \right) \\ &= \frac{23}{48} \end{aligned}$$

לפיכך:

□ $P\left(X - Y \leq \frac{1}{2}\right) = \frac{25}{48}$

פתרון סעיף ה'
 התוחלת היא:

$$\begin{aligned}
 E(X + 2Y) &= \iint_{\mathbb{R}^2} (x + 2y) f_{X,Y}(x, y) d(x, y) \\
 &= \frac{1}{6} \int_{x=1}^2 \int_{y=0}^3 (x + 2y) (5 - x - y) dy dx \\
 &= \frac{1}{6} \int_{x=1}^2 \int_{y=0}^3 (-2y^2 + (10 - 3x)y + (-x^2 + 5x)) dy dx \\
 &= \frac{1}{6} \int_{x=1}^2 \left(-\frac{2}{3}y^3 + \frac{1}{2}(10 - 3x)y^2 + (-x^2 + 5x)y \right) \Big|_{y=0}^3 dx \\
 &= \frac{1}{6} \int_{x=1}^2 \left(-18 + \frac{9}{2}(10 - 3x) + 3(-x^2 + 5x) \right) dx \\
 &= \frac{1}{12} \int_{x=1}^2 (-6x^2 + 3x + 54) dx \\
 &= \frac{1}{12} \left(-2x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 54x \right) \Big|_{x=1}^2 \\
 &= \frac{1}{12} \left((-16 + 6 + 108) - \left(-2 + \frac{3}{2} + 54 \right) \right) \\
 &= \frac{89}{24}
 \end{aligned}$$

□

שאלה 2

X ו- Y הם משתנים מקריים המוגדרים על אותו מרחב הסתברות. ידוע שתוחלת X היא μ ושונותו היא σ^2 . כמו כן ידוע ש- $Y|X \sim \text{Uni}(X, 1)$.

א. מצאו את $E(Y)$.

ב. מצאו את $\text{Var}(Y)$.

ג. מצאו את $\text{Cov}(Y, X)$.

פתרון סעיף א'

מנוסחת התוחלת השלמה:

$$E(Y) = E(E(Y|X)) = E\left(\frac{1+X}{2}\right) = \frac{1+\mu}{2}$$

□

פתרון סעיף ב'

מנוסחת השונות השלמה:

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(Y) &= E(\text{Var}(Y|X)) + \text{Var}(E(Y|X)) \\
 &= E\left(\frac{(X-1)^2}{12}\right) + \text{Var}\left(\frac{1+X}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{12} (E(X^2) - 2E(X) + 1) + \frac{1}{4} \text{Var}(X) \\
 &= \frac{1}{12} (\text{Var}(X) + E(X)^2 - 2E(X) + 1) + \frac{1}{4} \text{Var}(X) \\
 &= \frac{1}{12} (\sigma^2 + \mu^2 - 2\mu + 1) + \frac{1}{4} \sigma^2 \\
 &= \frac{1}{12} (4\sigma^2 + \mu^2 - 2\mu + 1)
 \end{aligned}$$

□

פתרון סעיף ג'

מנוסחת התוחלת השלמה:

$$\begin{aligned} E(XY) &= E(E(XY|X)) \\ &= E(X E(Y|X)) \\ &= E\left(X \cdot \frac{1+X}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} (E(X) + E(X^2)) \\ &= \frac{1}{2} (E(X) + \text{Var}(X) + E(X)^2) \\ &= \frac{1}{2} (\mu + \sigma^2 + \mu^2) \end{aligned}$$

לכן השונות המשותפת היא:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y, X) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= \frac{1}{2} (\mu + \sigma^2 + \mu^2) - \mu \cdot \frac{1+\mu}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sigma^2 \end{aligned}$$

□

חלק ב'

שאלה 3

נכון או לא נכון: תהי X, X_1, \dots, X_n סדרת משתנים מקריים המקיימת $E(X_n) = c$ ו- $\text{Var}(X_n) \rightarrow 0$ אזי X_n מתכנסת בהסתברות ל- c .

פתרון

יהי $\varepsilon > 0$, אז מאי-שוויון צ'בישב:

$$P(|X_n - c| > \varepsilon) = (|X_n - E(X_n)| > \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(X_n)}{\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

□

לפיכך הטענה נכונה.

שאלה 4

נכון או לא נכון: יהיו X_1, X_2, \dots משתנים מקריים בלתי-תלויים ושווי-התפלגות שתוחלתם 0 ושונותם 1. נגדיר:

$$S_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

אזי F_{S_n} שואפת לפונקציית ההסתברות המצטברת של משתנה מקרי מנוון המקבל את הערך 0 בהסתברות 1.

פתרון

יהי $\varepsilon > 0$, אז מחוק המספרים הגדולים:

$$P(|S_n| > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

לכן:

$$P(S_n \leq -\varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad P(S_n \leq \varepsilon) = 1 - P(S_n > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

ומכאן, כאשר $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$F_{S_n}(x) = P(S_n \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

□

לפיכך הטענה נכונה.

שאלה 5

נכון או לא נכון: X ו- Y הם בלתי-תלויים ושווי-התפלגות. יתכן שהפונקציה יוצרת המומנטים של $X + Y$ היא:

$$M_{X+Y}(t) = t + 1 - e^t$$

פתרון

מתקיים:

$$M''_{X+Y}(0) = -e^t|_{t=0} = -1 = E((X+Y)^2)$$

לא יכול להיות שתוחלת של משתנה מקרי אי-שלילי היא שלילית, לכן הפונקציה לא יכולה להיות פונקציה יוצרת מומנטים של אף משתנה מקרי (ובפרט של $X + Y$). □

שאלה 6

נכון או לא נכון: X ו- Y משתנים מקריים בלתי-תלויים המתפלגים באופן אחיד בקבוצה A במישור. אזי A הוא מלבן שצלעותיו מקבילות לצירים.

פתרון

ניתן דוגמה נגדית. נניח כי X ו- Y מתפלגים באופן אחיד על הקבוצה:

$$A = ([-2, -1] \times [0, 1]) \cup ([1, 2] \times [0, 1])$$

שהיא איחוד של שני ריבועים. שטח הקבוצה הוא 2, ופונקציית הצפיפות המשותפת היא:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2} (\mathcal{I}_{x \in [-2, -1]} + \mathcal{I}_{x \in [1, 2]}) \mathcal{I}_{y \in [0, 1]}$$

פונקציות הצפיפות השוליות הן:

$$f_X(x) = \frac{1}{2} (\mathcal{I}_{x \in [-2, -1]} + \mathcal{I}_{x \in [1, 2]}), \quad f_Y(y) = \mathcal{I}_{y \in [0, 1]}$$

□

ומתקיים $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$, לכן המשתנים הם בלתי-תלויים.

שאלה 7

נכון או לא נכון: תהי X, X_1, X_2, \dots סדרת משתנים מקריים בלתי-תלויים ושווי-התפלגות כך ש-
 $E(|X|) < \infty$, אז:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_{n^2}}{n^3} = 0$$

כמעט בוודאות.

פתרון

לפי טענה שהוכחנו בכיתה, אם $E(|X|) < \infty$ אז:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = 0$$

כמעט בוודאות. לפיכך גם:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_{n^2}}{n^2} = 0$$

ומכאן ברור כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_{n^2}}{n^3} = 0$$

והטענה נכונה.

□

שאלה 8

נכון או לא נכון: X ו- Y מפולגים אחיד בקבוצה במישור שהחלק הימני שלה הוא משולש שקודקודיו הם $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$ והחלק השמאלי שלה הוא חצי עיגול ברדיוס 1 סביב הראשית. אזי
 $E(XY) > 0$.

פתרון

נשים לב כי $XY > 0$ ברביע הראשון והשלישי ואילו $XY < 0$ ברביע השני והרביעי. אך השטחים שווים, לכן אינטואיטיבית עלינו לקבל $E(XY) = 0$. נראה זאת באופן מדויק יותר. נסמן את הקבוצה ב- A . קל לראות כי שטח הקבוצה הוא $2 + \frac{\pi}{2}$, לכן:

$$E(XY) = \frac{2}{\pi + 4} \iint_A xy \, d(x, y)$$

כעת, הפונקציה xy היא אנטי-סימטרית ביחס לציר ה- x , ואילו A היא סימטרית ביחס לציר ה- x , לפיכך
 $E(XY) = 0$.

□