משוואות דיפרנציאליות רגילות 1: פתרון מבחן לדוגמה של פרופ' רוזנאו

גרסה 1.0, פברואר 2010

ברק שושני
baraksh@gmail.com | http://baraksh.co.il/

שאלה 1

סעיף א'

נפתור את המשוואה:

$$\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)+u=0$$

ראשית נכתוב את המשוואה בצורה קנונית (נפתח את הסוגריים):

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)+u=0\\
\Rightarrow&\frac{1}{x^2}\left(x^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+2x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)+u=0\\
\Rightarrow&u''+\frac{2}{x}u'+u=0
\end{aligned}$$

הנקודה $x=0$ עשויה להיות נקודה בעייתית, משום שהמקדם של u' מתבדר בנקודה זו. עם זאת, קל לראות כי היא נקודה סינגולרית רגולרית, משום שהמקדם של u' מתבדר כמו $\frac{1}{x}$. צורה אחרת בה ניתן לראות זאת היא לכתוב את המשוואה כך:

$$x^2u''+2xu'+x^2u=0$$

ולהבחין כי המשוואה היא מהצורה הכללית:

$$x^2u''+x\left[xp\left(x\right)\right]u'+\left[x^2q\left(x\right)\right]u=0$$

כאשר:

$$xp\left(x\right)=2,\qquad x^2q\left(x\right)=x^2$$

הן פונקציות אנליטיות בנקודה $x=0$. מכאן, הנקודה היא סינגולרית רגולרית וניתן לפתור את המשוואה באמצעות הצבת טור מהצורה:

$$\begin{aligned}
u\left(x\right)&=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{r+n}\\
u'\left(x\right)&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(r+n\right)a_nx^{r+n-1}\\
u''\left(x\right)&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(r+n\right)\left(r+n-1\right)a_nx^{r+n-2}
\end{aligned}$$

נציב ונקבל:

$$
\begin{aligned}
& x^2\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_nx^{r+n-2}+2x\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_nx^{r+n-1}+x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{r+n}=0\\
\Rightarrow & \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_nx^{r+n}+\sum_{n=0}^{\infty}2(r+n)a_nx^{r+n}+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{r+n}=0\\
\Rightarrow & \sum_{n=0}^{\infty}\left[(r+n)(r+n-1)a_n+2(r+n)a_n+a_{n-2}\right]x^{r+n}=0\\
\Rightarrow & \sum_{n=0}^{\infty}\left[(r+n)(r+n+1)a_n+a_{n-2}\right]x^{r+n}=0
\end{aligned}
$$

כאשר הגדרנו $a_{-2}=a_{-1}=0$. כעת, נניח כי $a_0\neq 0$. אז באמצעות השוואת מקדמים בין שני אגפי המשוואה נקבל עבור $n=0$:

$$r(r+1)a_0=0\Longrightarrow r(r+1)=0\Longrightarrow r_1=0,\,r_2=-1$$

קיבלנו שני שורשים אשר ההבדל ביניהם הוא מספר שלם. נתחיל מהשורש הגדול יותר, $r_1=0$. עבור $n=1$ נקבל:

$$2a_1=0\Longrightarrow a_1=0$$

ועבור $n\geq 2$ נקבל את כלל הנסיגה:

$$a_n=-\frac{a_{n-2}}{(n+1)n}$$

מכאן רואים מיידית כי כל המקדמים a_n בעלי n אי־זוגי מתאפסים. ננסה למצוא צורה כללית למקדמים בעלי n זוגי:

$$
\begin{aligned}
a_n &= -\frac{a_{n-2}}{(n+1)n}\\
&= \left(-\frac{1}{(n+1)n}\right)\left(-\frac{a_{n-4}}{(n-1)(n-2)}\right)\\
&= \left(-\frac{1}{(n+1)n}\right)\left(-\frac{1}{(n-1)(n-2)}\right)\left(-\frac{a_{n-4}}{(n-3)(n-4)}\right)\\
&= \left(-\frac{1}{(n+1)n}\right)\left(-\frac{1}{(n-1)(n-2)}\right)\left(-\frac{1}{(n-3)(n-4)}\right)\cdots\left(-\frac{a_0}{3\cdot 2}\right)\\
&= \frac{(-1)^{n/2}}{(n+1)!}a_0
\end{aligned}
$$

מכאן, הפתרון הוא:

$$
\begin{aligned}
u(x) &= a_0\sum_{n\text{ even}}\frac{(-1)^{n/2}}{(n+1)!}x^n\\
&= a_0\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m}\\
&= a_0\frac{1}{x}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1}\\
&= a_0\frac{\sin x}{x}
\end{aligned}
$$

כאשר a_0 הוא קבוע שרירותי הנקבע ע"י תנאי ההתחלה.

כעת, אם בפתרון אחד מופיע $\sin x$, יהא זה הגיוני לנחש כי הפתרון השני דומה לראשון, אך מכיל דווקא $\cos x$. אכן, נציב את הניחוש:

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \frac{\cos x}{x}\\
u'(x) &= \frac{-x\sin x-\cos x}{x^2}=-\frac{\sin x}{x}-\frac{\cos x}{x^2}\\
u''(x) &= -\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}-\frac{-x^2\sin x-2x\cos x}{x^4}=2\frac{\cos x}{x^3}+2\frac{\sin x}{x^2}-\frac{\cos x}{x}
\end{aligned}
$$

במשוואה:

$$u'' + \frac{2}{x}u' + u = 0$$

ונקבל:

$$2\frac{\cos x}{x^3} + 2\frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} - 2\frac{\sin x}{x^2} - 2\frac{\cos x}{x^3} + \frac{\cos x}{x} = 0$$

וקל לראות כי אכן מתקיים שוויון.

אם איננו רוצים להתעסק בניחושים, ניתן לנסות את השורש השני, $r_2 = -1$. עבור $n = 1$ נקבל:

$$(n-1)\, n a_1 = 0 \Longrightarrow 0a_1 = 0$$

כלומר a_1 קבוע שרירותי. נבחר לשם הפשטות $a_1 = 0$ על מנת לאפס שוב את כל האיברים האי־זוגיים. עבור $n \geq 2$, כלל הנסיגה יהיה:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n\,(n-1)}$$

מכאן:

$$\begin{aligned}
a_n &= -\frac{a_{n-2}}{n\,(n-1)} \\
&= \left(-\frac{1}{n\,(n-1)}\right)\left(-\frac{a_{n-4}}{(n-2)\,(n-3)}\right) \\
&= \left(-\frac{1}{n\,(n-1)}\right)\left(-\frac{1}{(n-2)\,(n-3)}\right)\left(-\frac{a_{n-4}}{(n-4)\,(n-5)}\right) \\
&= \left(-\frac{1}{n\,(n-1)}\right)\left(-\frac{1}{(n-2)\,(n-3)}\right)\left(-\frac{1}{(n-4)\,(n-5)}\right)\cdots\left(-\frac{a_0}{2\cdot 1}\right) \\
&= \frac{(-1)^{n/2}}{n!}a_0
\end{aligned}$$

ולכן הפתרון השני יהיה:

$$\begin{aligned}
u(x) &= a_0 x^{-1}\sum_{n \text{ even}} \frac{(-1)^{n/2}}{n!}x^n \\
&= a_0\frac{1}{x}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m} \\
&= a_0\frac{\cos x}{x}
\end{aligned}$$

כצפוי.

נסכם כי שני פתרונות בלתי תלויים של המשוואה הם:

$$u_1(x) = \frac{\sin x}{x}, \qquad u_2(x) = \frac{\cos x}{x}$$

והפתרון הכללי הוא:

$$u(x) = \frac{1}{x}\left(A\sin x + B\cos x\right)$$

כאשר A, B הם קבועים שרירותיים. □

סעיף ב'

נוכיח כי לכל אחד מהפתרונות יש אינסוף שורשים.

ידוע כי לפונקציות $\sin x, \cos x$ יש אינסוף שורשים. ברור כי כאשר הן מתאפסות, הפונקציות:

$$u_1(x) = \frac{\sin x}{x}, \qquad u_2(x) = \frac{\cos x}{x}$$

מתאפסות גם הן. מכאן שלשני הפתרונות יש אינסוף שורשים. □

שאלה 2

סעיף א'

נמצא פתרון כללי של המערכת:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

נסמן:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

אז ניתן לרשום בקיצור:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$$

כעת, נציב פתרון מהצורה:

$$\mathbf{y} = \mathbf{v}\mathrm{e}^{rt}$$

כאשר $\mathbf{v}$ וקטור קבוע:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

נגזור ונקבל:

$$\mathbf{y}' = r\mathbf{v}\mathrm{e}^{rt}$$

נציב במשוואה:

$$r\mathbf{v}\mathrm{e}^{rt} = \mathbf{A}\mathbf{v}\mathrm{e}^{rt}$$

נצמצם, נעביר אגפים ונקבל תנאי עבור $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = r\mathbf{v}$$

כלומר, על $\mathbf{v}$ להיות וקטור עצמי של המטריצה $\mathbf{A}$ עם ערך עצמי r. משוואה זו שקולה למשוואה:

$$(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

כאשר $\mathbf{I}$ מטריצת היחידה ו־$\mathbf{0}$ וקטור האפס. על מנת שלמשוואה זו יהיה פתרון, על המטריצה $(\mathbf{A} - r\mathbf{I})$ להיות סינגולרית (אחרת הפתרון האפשרי היחיד הוא הפתרון הטריוויאלי $\mathbf{v} = \mathbf{0}$). לכן נדרוש:

$$\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = 0$$

הדטרמיננטה היא:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-r & 0 & 0 \\ 2 & 1-r & -2 \\ 3 & 2 & 1-r \end{vmatrix} &= (1-r)\left[(1-r)^2 + 4\right] \\ &= (1-r)\left(5 - 2r + r^2\right) \end{aligned}$$

וברור כי $r_1 = 1$ מאפס אותה. למציאת השורשים הנוספים, נפתור את המשוואה הריבועית:

$$\begin{aligned} r_{2,3} &= \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} \\ &= 1 \pm 2\mathrm{i} \end{aligned}$$

מכאן ששלושת הערכים העצמיים של המטריצה הם:

$$r_1 = 1, \qquad r_{2,3} = 1 \pm 2\mathrm{i}$$

מאחר שלכל ערך עצמי ריבוי אלגברי 1, גם הריבוי הגאומטרי הוא בהכרח 1, כלומר לכל ערך עצמי יש מרחב של וקטורים עצמיים בעל מימד 1. ראשית נמצא וקטור עצמי הפורש את המרחב העצמי של r_1. וקטור זה הוא כל וקטור אשר פותר את המשוואה:

$$(\mathbf{A} - r_1\mathbf{I})\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

כלומר:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

מהשורה השנייה נקבל:

$$v_3 = v_1$$

ומהשלישית נקבל:

$$v_2 = -\frac{3}{2}v_1$$

ואם נבחר $v_1 = 2$ נקבל את הווקטור העצמי:

$$\mathbf{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

כעת, ניגש לערך העצמי $r_2 = 1 + 2\mathrm{i}$. מתקיים $1 - r_2 = -2\mathrm{i}$, לכן המשוואה תהיה הפעם:

$$\begin{pmatrix} -2\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 2 & -2\mathrm{i} & -2 \\ 3 & 2 & -2\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ונקבל:

$$v_1 = 0, \qquad v_2 = \mathrm{i}v_3$$

מכאן, וקטור עצמי הוא למשל:

$$\mathbf{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$$

כעת, נשים לב כי $r_3 = \overline{r_2}$ (כאשר $\overline{r_2}$ הוא הצמוד של r_2), לכן אם $\mathbf{v}$ מקיים:

$$(\mathbf{A} - r_2\mathbf{I})\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

ניקח את הצמוד של שני אגפי המשוואה ונקבל:

$$(\mathbf{A} - r_3\mathbf{I})\,\overline{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$$

מכאן שהווקטור העצמי של r_3 הוא פשוט הצמוד של הווקטור העצמי של r_2:

$$\mathbf{v}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$$

נזכור כי הפתרון שהצבנו היה מהצורה:

$$\mathbf{y} = \mathbf{v}\mathrm{e}^{rt}$$

כאשר $\mathbf{v}$ הוא הווקטור העצמי של הערך העצמי r. מכאן שהפתרון הכללי הוא צירוף לינארי של שלושה פתרונות כאלה, המתאימים לווקטורים ולערכים העצמיים שמצאנו:

$$\begin{aligned}\mathbf{y} &= C_1\mathbf{v}^{(1)}\mathrm{e}^{r_1 t} + C_2\mathbf{v}^{(2)}\mathrm{e}^{r_2 t} + C_3\mathbf{v}^{(3)}\mathrm{e}^{r_3 t} \\ &= C_1\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}\mathrm{e}^{t} + C_2\begin{pmatrix}0\\\mathrm{i}\\1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})t} + C_3\begin{pmatrix}0\\-\mathrm{i}\\1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{(1-2\mathrm{i})t} \\ &= \left[C_1\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}0\\\mathrm{i}\\1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} + C_3\begin{pmatrix}0\\-\mathrm{i}\\1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}\right]\mathrm{e}^{t}\end{aligned}$$

כעת, הבעיה המקורית ניתנה באמצעות מטריצה ממשית. מכאן, הגיוני להניח כי גם הפתרון צריך להיות ממשי. אם כן, נמיר את החלק בפתרון שעשוי להיות מרוכב:

$$C_2\begin{pmatrix}0\\\mathrm{i}\\1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} + C_3\begin{pmatrix}0\\-\mathrm{i}\\1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}$$

בביטוי המכיל פונקציות טריגונומטריות ממשיות, באמצעות נוסחת אוילר:

$$\begin{aligned}& C_2\begin{pmatrix}0\\\mathrm{i}\\1\end{pmatrix}[\cos(2t)+\mathrm{i}\sin(2t)] + C_3\begin{pmatrix}0\\-\mathrm{i}\\1\end{pmatrix}[\cos(2t)-\mathrm{i}\sin(2t)] \\ =& \left[C_2\begin{pmatrix}0\\\mathrm{i}\\1\end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix}0\\-\mathrm{i}\\1\end{pmatrix}\right]\cos(2t) + \left[C_2\begin{pmatrix}0\\-1\\\mathrm{i}\end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix}0\\-1\\-\mathrm{i}\end{pmatrix}\right]\sin(2t) \\ =& \begin{pmatrix}0\\(C_2-C_3)\,\mathrm{i}\\C_2+C_3\end{pmatrix}\cos(2t) + \begin{pmatrix}0\\-(C_2+C_3)\\(C_2-C_3)\,\mathrm{i}\end{pmatrix}\sin(2t) \\ =& \begin{pmatrix}0\\D_1\\D_2\end{pmatrix}\cos(2t) + \begin{pmatrix}0\\-D_2\\D_1\end{pmatrix}\sin(2t) \\ =& D_1\begin{pmatrix}0\\\cos(2t)\\\sin(2t)\end{pmatrix} + D_2\begin{pmatrix}0\\-\sin(2t)\\\cos(2t)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

כאשר הגדרנו:

$$D_1 \equiv (C_2 - C_3)\,\mathrm{i}, \qquad D_2 = C_2 + C_3$$

מכאן, הפתרון הכללי הסופי הוא:

$$\mathbf{y} = \left[C_1\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix} + D_1\begin{pmatrix}0\\\cos(2t)\\\sin(2t)\end{pmatrix} + D_2\begin{pmatrix}0\\-\sin(2t)\\\cos(2t)\end{pmatrix}\right]\mathrm{e}^{t}$$

כאשר $C_1, D_1, D_2 \in \mathbb{R}$.

סעיף ב'

נפתור את בעיית ההתחלה:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{y}, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix}6 & -3\\2 & 1\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

משיקולים דומים לאלה שבסעיף הקודם, נחפש את הערכים והווקטורים העצמיים של המטריצה $\mathbf{A}$:

$$\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = \begin{vmatrix}6-r & -3\\2 & 1-r\end{vmatrix} = (6-r)(1-r) + 6 = 12 - 7r + r^2 = 0$$

מכאן:

$$r_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2}$$

ולכן:

$$r_1 = 3, \qquad r_2 = 4$$

נציב את $r_1 = 3$ במטריצה ונקבל את המשוואה:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

מכאן:

$$v_1 = v_2 \Longrightarrow \mathbf{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

נציב את $r_2 = 4$ במטריצה ונקבל את המשוואה:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

מכאן:

$$v_1 = \frac{3}{2} v_2 \Longrightarrow \mathbf{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ולכן הפתרון הכללי הוא:

$$\mathbf{y} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} + C_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{4t}$$

כעת, נציב את תנאי ההתחלה:

$$\mathbf{y}(0) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

מכאן:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

נדרג ונקבל:

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

לכן הפתרון הפרטי הוא:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} - \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{4t}$$

סעיף ג'

נמצא את $\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}$, כאשר:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ראשית, נלכסן את המטריצה $\mathbf{A}$. מטריצת הליכסון, המורכבת מהווקטורים העצמיים שמצאנו בסעיף הקודם, היא:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

והמטריצה ההופכית לה היא:

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{P}|} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

מכאן נקבל:

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$$

כאשר $\mathbf{D}$ היא מטריצה אלכסונית המורכבת מהערכים העצמיים של $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{D} = \mathrm{diag}\,(3,4) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

כעת, המטריצה $\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}$ מוגדרת כך:

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!}$$

אבל:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$$

לכן:

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}\right)^n t^n}{n!}$$

כעת,

$$\left(\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}\right)^n = \underbrace{\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}\cdots\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}}_{n \text{ times}} = \mathbf{P}\mathbf{D}^n\mathbf{P}^{-1}$$

ומכאן:

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{P}\mathbf{D}^n\mathbf{P}^{-1}t^n}{n!} = \mathbf{P}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbf{D}^n t^n}{n!}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\mathrm{e}^{\mathbf{D}t}\mathbf{P}^{-1}$$

בנוסף:

$$\mathbf{D}^n = \mathrm{diag}\,(3^n, 4^n)$$

ולכן:

$$\mathrm{e}^{\mathbf{D}t} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbf{D}^n t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{diag}\,(3^n,4^n)\,t^n}{n!} = \mathrm{diag}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n t^n}{n!}, \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n t^n}{n!}\right) = \mathrm{diag}\left(\mathrm{e}^{3t}, \mathrm{e}^{4t}\right)$$

ומכאן נקבל:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{P}\mathrm{diag}\left(\mathrm{e}^{3t},\mathrm{e}^{4t}\right)\mathbf{P}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2\mathrm{e}^{3t} & 3\mathrm{e}^{3t} \\ \mathrm{e}^{4t} & -\mathrm{e}^{4t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2\mathrm{e}^{3t}+3\mathrm{e}^{4t} & 3\mathrm{e}^{3t}-3\mathrm{e}^{4t} \\ -2\mathrm{e}^{3t}+2\mathrm{e}^{4t} & 3\mathrm{e}^{3t}-2\mathrm{e}^{4t} \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{e}^{3t}\begin{pmatrix} -2+3\mathrm{e}^{t} & 3-3\mathrm{e}^{t} \\ -2+2\mathrm{e}^{t} & 3-2\mathrm{e}^{t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

שאלה 3

סעיף א'

נתונה המשוואה:

$$y''+3y'+2y=g\left(x\right)$$

נפתח את הנוסחה לפתרון כללי של הבעיה.

ראשית, נשים לב כי אם $y_{\mathrm{h}}\left(x\right)$ הוא הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית המתאימה:

$$y''+3y'+2y=0$$

ו־$y_{\mathrm{p}}\left(x\right)$ הוא פתרון פרטי של המשוואה הלא הומוגנית, אז סכום הפתרונות יהיה פתרון כללי של המשוואה הלא הומוגנית:

$$\begin{aligned}&\left(y_{\mathrm{h}}+y_{\mathrm{p}}\right)''+3\left(y_{\mathrm{h}}+y_{\mathrm{p}}\right)'+2\left(y_{\mathrm{h}}+y_{\mathrm{p}}\right)\\=&\left(y_{\mathrm{h}}''+3y_{\mathrm{h}}'+2y_{\mathrm{h}}\right)+\left(y_{\mathrm{p}}''+3y_{\mathrm{p}}'+2y_{\mathrm{p}}\right)\\=&0+g\left(x\right)\\=&g\left(x\right)\end{aligned}$$

נפתור, אם כן, ראשית את המשוואה ההומוגנית. מהמשוואה רואים כי הסכום של הפונקציה ושל נגזרותיה נותן אפס, כלומר הפונקציה ונגזרותיה תלויות לינארית. ידוע כי הפונקציה האקספוננציאלית אינה משתנה לאחר גזירה, לכן ננסה פתרון מהצורה:

$$y\left(x\right)=\mathrm{e}^{rx}$$

כאשר r מספר כלשהו. נציב במשוואה ונקבל:

$$r^2\mathrm{e}^{rx}+3r\mathrm{e}^{rx}+2\mathrm{e}^{rx}=0$$

נשים לב כי $\mathrm{e}^{rx}\neq 0$, לכן נוכל לחלק בו ולקבל:

$$r^2+3r+2=0$$

פתרונותיה של המשוואה הריבועית הם:

$$r_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{-3\pm 1}{2}$$

כלומר:

$$r_1=-1,\qquad r_2=-2$$

ולכן קיבלנו שני פתרונות:

$$y_1\left(x\right)=\mathrm{e}^{-x},\qquad y_2\left(x\right)=\mathrm{e}^{-2x}$$

שני הפתרונות הם בלתי תלויים לינארית, כי הוורונסקיאן אינו מתאפס:

$$\begin{aligned}W\left(y_1,y_2\right)&=\begin{vmatrix}\mathrm{e}^{-x}&\mathrm{e}^{-2x}\\-\mathrm{e}^{-x}&-2\mathrm{e}^{-2x}\end{vmatrix}\\&=\mathrm{e}^{-3x}\begin{vmatrix}1&1\\-1&-2\end{vmatrix}\\&=-\mathrm{e}^{-3x}\neq 0\end{aligned}$$

לכן הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית הוא:

$$y_{\mathrm{h}}\left(x\right)=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}$$

כאשר C_1,C_2 קבועים שרירותיים כלשהם.

כעת נמצא פתרון פרטי למשוואה הלא הומוגנית. נניח כי הפתרון הוא מאותה צורה כמו הפתרון למשוואה ההומוגנית, כאשר המקדמים הקבועים C_1, C_2 מוחלפים בפונקציות $u_1(x), u_2(x)$:

$$y_{\mathrm{p}}(x) = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

אם נניח כי מתקיים:

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0$$

אז הנגזרת הראשונה תהיה:

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{p}}'(x) &= u_1' y_1 + u_2' y_2 + u_1 y_1' + u_2 y_2' \\ &= u_1 y_1' + u_2 y_2' \end{aligned}$$

והנגזרת השנייה:

$$y_{\mathrm{p}}''(x) = u_1' y_1' + u_2' y_2' + u_1 y_1'' + u_2 y_2''$$

נציב במשוואה ונקבל:

$$\begin{aligned} & y'' + 3y' + 2y = g(x) \\ \Rightarrow & u_1' y_1' + u_2' y_2' + u_1 y_1'' + u_2 y_2'' + 3u_1 y_1' + 3u_2 y_2' + 2u_1 y_1 + 2u_2 y_2 = g(x) \\ \Rightarrow & u_1 (y_1'' + 3y_1' + 2y_1) + u_2 (y_2'' + 3y_2' + 2y_2) + u_1' y_1' + u_2' y_2' = g(x) \end{aligned}$$

אבל y_1, y_2 הם פתרונות של המשוואה ההומוגנית, לכן נוכל להציב $y_1'' + 3y_1' + 2y_1 = 0$ ולקבל:

$$u_1' y_1' + u_2' y_2' = g(x)$$

נזכור כי בנוסף הנחנו:

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0$$

ומכאן נקבל את מערכת המשוואות:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix}$$

אשר פתרונה הוא, לפי כלל קרמר:

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}, \qquad u_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}$$

נשים לב כי:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = W(y_1, y_2)$$

ומכאן הפתרון יהיה:

$$u_1' = \frac{-y_2 g(x)}{W(y_1, y_2)}, \qquad u_2' = \frac{y_1 g(x)}{W(y_1, y_2)}$$

לפיכך, הפתרון הפרטי של המשוואה הלא הומוגנית יהיה:

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{p}}(x) &= u_1 y_1 + u_2 y_2 \\ &= y_1 \int \frac{-y_2 g(x)}{W(y_1, y_2)} \mathrm{d}x + y_2 \int \frac{y_1 g(x)}{W(y_1, y_2)} \mathrm{d}x \end{aligned}$$

כעת, נציב את y_1, y_2 ואת הוורונסקיאן ונקבל:

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{p}}(x) &= \mathrm{e}^{-x} \int \frac{-\mathrm{e}^{-2x} g(x)}{-\mathrm{e}^{-3x}} \mathrm{d}x + \mathrm{e}^{-2x} \int \frac{\mathrm{e}^{-x} g(x)}{-\mathrm{e}^{-3x}} \mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^{-x} \int \mathrm{e}^{x} g(x)\, \mathrm{d}x - \mathrm{e}^{-2x} \int \mathrm{e}^{2x} g(x)\, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

נשים לב כי לאחר האינטגרציה, קבועי האינטגרציה ישמשו כקבועים השרירותיים C_1, C_2 מהפתרון הכללי; למרות זאת, נכתוב במפורש את הקבועים בפתרון המלא, על מנת להדגיש שהפתרון מכיל שני קבועים אשר ייקבעו לפי תנאי ההתחלה:

$$y(x) = \mathrm{e}^{-x} \left[\int \mathrm{e}^{x} g(x)\, \mathrm{d}x + C_1 \right] - \mathrm{e}^{-2x} \left[\int \mathrm{e}^{2x} g(x)\, \mathrm{d}x + C_2 \right]$$

סעיף ב'

נמצא את הפתרון המפורש כאשר

$$y(0)=y'(0)=0, \qquad g(x)=\mathrm{e}^{-2x}$$

ראשית, נציב את $g(x)$ בביטוי שקיבלנו בסעיף הקודם:

$$\begin{aligned}
y(x) &= \mathrm{e}^{-x}\left[\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x+C_1\right]-\mathrm{e}^{-2x}\left[\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x+C_2\right]\\
&= \mathrm{e}^{-x}\left[\int \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+C_1\right]-\mathrm{e}^{-2x}\left[\int \mathrm{d}x+C_2\right]\\
&= \mathrm{e}^{-x}\left[-\mathrm{e}^{-x}+C_1\right]-\mathrm{e}^{-2x}\left[x+C_2\right]\\
&= -\mathrm{e}^{-2x}+C_1\mathrm{e}^{-x}-x\mathrm{e}^{-2x}-C_2\mathrm{e}^{-2x}\\
&= C_1\mathrm{e}^{-x}-C_2\mathrm{e}^{-2x}-\mathrm{e}^{-2x}(1+x)
\end{aligned}$$

לכן הנגזרת הראשונה היא:

$$y'(x)=-C_1\mathrm{e}^{-x}+2C_2\mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^{-2x}(1+2x)$$

כעת נציב את תנאי ההתחלה:

$$\begin{aligned}
y(0)=C_1-C_2-1=0 &\Longrightarrow C_1=C_2+1\\
y'(0)=-C_1+2C_2+1=0 &\Longrightarrow C_1=2C_2+1
\end{aligned}$$

רואים מיד כי חייב להתקיים $C_2=0$, אחרת נקבל סתירה. מכאן $C_1=1$ והפתרון הפרטי המתאים לתנאי ההתחלה הנתונים יהיה:

$$y(x)=\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}(1+x)$$

שאלה 2

סעיף א'

נתונה המשוואה:

$$y'=a(x)+b(x)y+c(x)y^2$$

נוכיח את הטענה: אם ידוע פתרון פרטי $y_1(x)$, אז הפתרון הכללי נתון ע"י מד"ר מסדר ראשון.

אכן, נציב:

$$y=y_1+\frac{1}{z}$$

כאשר $z(x)$ היא פונקציה לא ידועה של x. אז:

$$y'=y_1'-\frac{z'}{z^2}$$

נציב במשוואה ונקבל:

$$\begin{aligned}
&y_1'-\frac{z'}{z^2}=a+b\left(y_1+\frac{1}{z}\right)+c\left(y_1+\frac{1}{z}\right)^2\\
\Rightarrow &y_1'-\frac{z'}{z^2}=a+by_1+b\frac{1}{z}+cy_1^2+2c\frac{y_1}{z}+c\frac{1}{z^2}\\
\Rightarrow &y_1'-\frac{z'}{z^2}=\left(a+by_1+cy_1^2\right)+b\frac{1}{z}+2c\frac{y_1}{z}+c\frac{1}{z^2}
\end{aligned}$$

כעת, מאחר שנתון כי $y_1' = a + by_1 + cy_1^2$ נוכל לחסר משוואה זו מהמשוואה לעיל ולקבל:

$$\begin{aligned} & -\frac{z'}{z^2} = b\frac{1}{z} + 2c\frac{y_1}{z} + c\frac{1}{z^2} \\ \Rightarrow & z' = -\left(b + 2cy_1\right)z - c \end{aligned}$$

זוהי משוואה דיפרנציאלית לינארית מסדר ראשון עבור z. אם נפתור אותה, נקבל ביטוי ובו קבוע חופשי אחד. מכאן, הפתרון שניחשנו:

$$y = y_1 + \frac{1}{z}$$

הוא אכן פתרון כללי של המשוואה הלינארית הנתונה.

סעיף ב'

נתון כי:

$$y_1\left(x\right) = x$$

פותר את המשוואה:

$$y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2$$

נמצא את הפתרון הכללי.

נשים לב כי המשוואה היא המשוואה מסעיף א' עם:

$$a\left(x\right) = 1 + x^2, \qquad b\left(x\right) = -2x, \qquad c\left(x\right) = 1$$

מכאן, המשוואה הדיפרנציאלית שעלינו לפתור תהיה:

$$z' = -\left(-2x + 2x\right)z - 1 = -1$$

הפתרון ניתן ע"י אינטגרציה:

$$z = -x + C$$

כאשר C הוא קבוע שרירותי. מכאן, הפתרון הכללי הוא

$$y = x - \frac{1}{x + C}$$