שיטות בפיזיקה עיונית 2: סיכום ודף נוסחאות

גרסה 1.3, נובמבר 2010

ברק שושני
baraksh@gmail.com | http://baraksh.co.il/

חלק I
פונקציות מיוחדות

1 פונקציות בסל

1.1 פונקציות בסל מהסוג הראשון, J_n

פונקציות בסל (Bessel) פותרות את משוואת בסל:

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + \left(x^2 - n^2\right) y(x) = 0$$
$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y(x) = 0$$

ניתן להגדיר אותן בכל אחת מהדרכים הבאות:

$$e^{\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^n$$

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}}{t^{n+1}} dt$$

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - x\sin\theta)\, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n\theta - x\sin\theta)} d\theta \end{aligned}$$

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!\,(m+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}$$

$$J_n(x) = \frac{e^{-ix}}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n {}_1F_1\left(n + \frac{1}{2}; 2n+1; 2ix\right)$$

הן מקיימות את יחסי האורתוגונליות:

$$\int_0^{\infty} J_n(x)\, J_m(x)\, \frac{dx}{x} = \frac{2}{\pi}\frac{\sin\left[\frac{\pi}{2}(n-m)\right]}{n^2 - m^2}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x J_n(x\alpha_{n,p})\, J_n(x\alpha_{n,q})\, dx &= \frac{1}{2}\left[J_{n+1}(\alpha_{n,p})\right]^2 \delta_{pq} \\ &= \frac{1}{2}\left[J_n'(\alpha_{n,p})\right]^2 \delta_{pq} \end{aligned}$$

כאשר $\alpha_{n,p}$ הוא האפס ה־p של J_n, ואת נוסחאות הנסיגה והגזירה:

$$\frac{2n}{x}J_n(x) = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)$$
$$2J_n'(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)$$
$$\frac{1}{x^m}\left(\frac{d}{dx}\right)^m \left[x^n J_n(x)\right] = x^{n-m} J_{n-m}(x)$$
$$\frac{1}{x^m}\left(\frac{d}{dx}\right)^m \left[x^{-n} J_n(x)\right] = (-1)^m x^{-n-m} J_{n+m}(x)$$

הוורונסקיאן (Wronskian) של שני הפתרונות J_n, J_{-n} הוא:

$$J_n J_{-n}' - J_n' J_{-n} = -\frac{2\sin(n\pi)}{\pi x}$$

מכאן רואים כי עבור n שלם הפונקציות J_n, J_{-n} תלויות. הפיתוח האסימפטוטי הוא:

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left[x - \frac{\pi}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right], \qquad x \to \infty$$

מקרים מעניינים הם:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x, \qquad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right)$$

$$J_{-\frac{3}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\cos x}{x} + \sin x\right)$$

עבור n ממשי חיובי או שלם שלילי, $J_n(0) = 0$. עבור $n = 0$, $J_n(0) = 1$. עבור n לא שלם ושלילי, $J_n(0)$ מתבדרת.

1.2 פונקציות בסל מהסוג השני, N_n (או Y_n)

אם n לא שלם, J_n ו־J_{-n} הם שני פתרונות בלתי־תלויים לינארית של משוואת בסל. אך כאשר n שלם, מתקיים:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

ולכן קיים למשוואת בסל פתרון נוסף - פונקציות נוימן (Neumann). לכל n שלם פתרון זה מתבדר באפס, ומסיבה זו, בבעיות רבות ניתן להתעלם ממנו. (למעשה, ההתבדרות היא לכל n פרט ל־n חצי־שלם שלילי $\ldots, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$, שם $N_n(0) = 0$. בנוסף, לכל n חיובי ההתבדרות היא ל־$-\infty$) . הפונקציה מוגדרת כך:

$$N_n(x) = \frac{\cos(n\pi)\, J_n(x) - J_{-n}(x)}{\sin(n\pi)}$$

כאשר את ההגדרה מבינים בתור הגבול כאשר n שואף למספר השלם. ניתן להגדיר את הפונקציה גם כאינטגרל:

$$\begin{aligned} N_n(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x\sin\theta - n\theta)\, d\theta + \\ &\quad -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(e^{nt} + (-1)^n e^{-nt}\right) e^{-x\sinh t} dt \\ N_n(x) &= -\frac{2\left(\frac{1}{2}x\right)^{-n}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right)}\int_1^{\infty}\frac{\cos(xt)}{\left(t^2 - 1\right)^{n+\frac{1}{2}}} dt \end{aligned}$$

עבור $N_0(x)$ קיים פיתוח, פשוט יחסית, לטור:

$$\frac{2}{\pi}\left\{\left[\ln\left(\frac{1}{2}x\right) + \gamma\right] J_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} H_k \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2}\right\}$$

כאשר:

$$H_k = \sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m}, \qquad \gamma = \lim_{k\to\infty}\left(H_k - \ln k\right)$$

בסביבת 0 מתקיים:

$$N_n(x) \approx \begin{cases} \frac{2}{\pi}\left[\ln\left(\frac{1}{2}x\right) + \gamma\right] & n = 0 \\ -\frac{\Gamma(n)}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^n & n \neq 0 \end{cases}$$

והפיתוח האסימפטוטי הוא:

$$N_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left[x - \frac{\pi}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right]$$

פונקציות נוימן מקיימות את אותן נוסחאות נסיגה כמו J_n. הוורונסקיאן של שני הפתרונות הוא:

$$J_n N_n' - N_n J_n' = \frac{2}{\pi x}$$

1.3 פונקציות הנקל, $H_n^{(1)}, H_n^{(2)}$

קיימים שני סוגים של פונקציות הנקל (Hankel):

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + iN_n(x)$$
$$H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - iN_n(x)$$

הגדרה זו אנלוגית להגדרה:

$$e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$$

וניתן למצוא הצדקה לכך אף בפיתוחים האסימפטוטיים של J_n, N_n. נשים לב כי $H_n^{(1)}, H_n^{(2)}$ הם צמודים מרוכבים עבור x ממשי. פונקציות הנקל מקיימות אף הן את נוסחאות הנסיגה של J_n. כמו כן מתקיימות נוסחאות הוורונסקיאן:

$$H_n^{(2)} H_{n+1}^{(1)} - H_n^{(1)} H_{n+1}^{(2)} = \frac{4}{i\pi x}$$
$$J_{n-1} H_n^{(1)} - J_n H_{n-1}^{(1)} = \frac{2}{i\pi x}$$
$$J_n H_{n-1}^{(2)} - J_{n-1} H_n^{(2)} = \frac{2}{i\pi x}$$

ולכל n מתקיים:

$$H_{-n}^{(1)}(x) = e^{n\pi i} H_n^{(1)}(x), \qquad H_{-n}^{(2)}(x) = e^{-n\pi i} H_n^{(2)}(x)$$

ניתן גם להגדיר את הפונקציות באמצעות האינטגרלים:

$$H_n^{(1)}(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}n\pi i}}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\cosh t - nt} dt$$
$$H_n^{(2)}(x) = -\frac{e^{-\frac{1}{2}n\pi i}}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\cosh t - nt} dt$$

בסביבת 0 מתקיים: (עבור $H_n^{(2)}$ יש לקחת את הצמוד המרוכב)

$$H_n^{(1)}(x) \approx \begin{cases} \frac{2i}{\pi}\ln x + 1 + \frac{2i}{\pi}(\gamma - \ln 2) & n = 0 \\ -\frac{i(n-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^n & n \neq 0 \end{cases}$$

והפיתוח האסימפטוטי הוא: (גם כאן עבור $H_n^{(2)}$ יש לקחת את הצמוד)

$$H_n^{(1)}(x) \sim (1 - i)\frac{1}{\sqrt{\pi x}} e^{-i\left(\frac{1}{2}\pi n - x\right)}$$

1.4 פונקציות בסל המותאמות, I_n, K_n

פונקציית בסל המותאמת (Modified) מהסוג הראשון מסומנת I_n ומהסוג השני מסומנת K_n. פונקציות אלה הן למעשה צורה נוחה לעבוד עם פונקציות בסל הרגילות עבור משתנה מדומה טהור. ראינו כי פונקציות בסל הרגילות אנלוגיות ל־$\sin$ ו־$\cos$; באותה צורה, פונקציות בסל המותאמות אנלוגיות ל־$\sinh$ ו־$\cosh$. הן פותרות את משוואת בסל המותאמת:

$$x^2 y''(x) + xy'(x) - \left(x^2 + n^2\right) y(x) = 0$$

וניתן להגדיר אותן בכל אחת מהצורות הבאות:

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix) \Leftrightarrow J_n(x) = i^n I_n(-ix)$$
$$K_n(x) = \frac{\pi}{2} i^{n+1} H_n^{(1)}(ix)$$
$$K_n(x) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-n}(x) - I_n(x)}{\sin(n\pi)}$$

$$e^{\frac{x}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x)\, t^n$$

$$I_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{e^{\frac{x}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)}}{t^{n+1}} dt$$

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{x\cos\theta}\cos(n\theta)\, d\theta - \frac{\sin(n\pi)}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-z\cosh t - nt} dt$$

$$\begin{aligned} K_n(x) &= \frac{\sqrt{\pi}}{\left(n - \frac{1}{2}\right)!}\left(\frac{x}{2}\right)^n \int_0^{\infty} e^{-x\cosh t}\sinh^{2n} t\, dt \\ &\quad \left(n > -\frac{1}{2}, |\arg x| < \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\left(n - \frac{1}{2}\right)!}\left(\frac{x}{2}\right)^n \int_1^{\infty} e^{-xt}\left(t^2 - 1\right)^{n - 1/2} dt \\ &\quad \left(n > -\frac{1}{2}\right) \\ &= \int_0^{\infty} e^{-x\cosh t}\cosh(nt)\, dt \\ &\quad (\mathrm{Re}(x) > 0) \end{aligned}$$

$$I_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!\,(m+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}$$

$$I_n(x) = \frac{e^{-x}}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n {}_1F_1\left(n + \frac{1}{2}; 2n+1; 2x\right)$$
$$K_n(x) = \sqrt{\pi} e^{-x}(2x)^n\, U\left(n + \frac{1}{2}; 2n+1; 2x\right)$$

$$I_n(x) = T_n \frac{d}{dx} I_0(x)$$

כאשר T_n הוא פולינום צ'בישב מהסוג הראשון ו־$_1F_1, U$ הן פונקציות היפרגאומטריות (ראו להלן). כמו כן מתקיים יחס הסימטריה:

$$I_{-n}(x) = I_n(x), \qquad K_{-n}(x) = K_n(x) \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

את יחסי הרקורסיה ניתן לקבל בקלות מיחסי הרקורסיה של J_n. ההתנהגות של פונקציות בסל המותאמות ב־0 זהה להתנהגות של פונקציות בסל הרגילות (למעט העובדה ש־K_n מתבדרת ל־$+\infty$ לכל n). בסביבת 0 מתקיים:

$$K_n(x) \approx \begin{cases} -\ln x - \gamma + \ln 2 & n = 0 \\ 2^{n-1}(n-1)!\, x^{-n} & n \neq 0 \end{cases}$$

הפיתוחים האסימפטוטיים הם:

$$I_n(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \qquad K_n(x) \sim e^{-x}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

והוורונסקיאן הוא:

$$I_n K_n' - K_n I_n' = -\frac{1}{x}$$

1.5 פונקציות בסל הכדוריות, j_n ו־n_n (או y_n)

לפונקציות בסל הרגילות ולפונקציות הנקל יש פונקציות כדוריות (Spherical) מקבילות. הן פותרות את משוואת בסל הכדורית:

$$x^2 y''(x) + 2xy'(x) + \left[x^2 - n(n+1)\right] y(x) = 0$$

והן מוגדרות כך:

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+\frac{1}{2}}(x)$$
$$n_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^{n+1}\sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{-n-\frac{1}{2}}(x)$$
$$h_n^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x) = j_n(x) + in_n(x)$$
$$h_n^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(x) = j_n(x) - in_n(x)$$

מכאן נובעים הפיתוחים הבאים:

$$j_n(x) = (2x)^n \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s (s+n)!}{s!\,(2s+2n+1)!} x^{2s}$$
$$n_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n x^{n+1}}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s (s-n)!}{s!\,(2s-2n)!} x^{2s}$$
$$h_n^{(1)}(x) = (-i)^{n+1}\frac{e^{ix}}{x}\sum_{s=0}^{n}\frac{i^s}{s!\,(2x)^s}\frac{(n+s)!}{(n-s)!}$$
$$h_n^{(2)}(x) = i^{n+1}\frac{e^{-ix}}{x}\sum_{s=0}^{n}\frac{(-i)^s}{s!\,(2x)^s}\frac{(n+s)!}{(n-s)!}$$

ניתן להגדיר את הפונקציות גם כך:

$$\frac{1}{x}\cos\sqrt{x^2 - 2xt} = \sum_{n=0}^{\infty} j_{n-1}(x)\frac{t^n}{n!}$$
$$\frac{1}{x}\sin\sqrt{x^2 + 2xt} = \sum_{n=0}^{\infty} n_{n-1}(x)\frac{(-t)^n}{n!}$$

במונחים של פונקציות טריגונומטריות מתקיים:

$$j_n(x) = (-x)^n \left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n \frac{\sin x}{x}$$

$$n_n(x) = -(-x)^n \left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n \frac{\cos x}{x}$$

מכאן:

$$j_0(x) = \frac{1}{x}\sin x, \qquad j_1(x) = \frac{1}{x^2}\sin x - \frac{1}{x}\cos x$$

$$j_2(x) = \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\sin x - \frac{3}{x^2}\cos x$$

$$j_3(x) = \left(\frac{15}{x^4} - \frac{6}{x^2}\right)\sin x - \left(\frac{15}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\cos x$$

$$n_0(x) = -j_{-1}(x) = -\frac{1}{x}\cos x$$

$$n_1(x) = j_{-2}(x) = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}$$

$$n_2(x) = -j_{-3}(x) = -\left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\cos x - \frac{3}{x^2}\sin x$$

$$n_3(x) = j_{-4}(x) = -\left(\frac{15}{x^4} - \frac{6}{x^2}\right)\cos x - \left(\frac{15}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\sin x$$

הפיתוחים האסימפטוטיים הם:

$$j_n(x) \sim \frac{1}{x}\sin\left(x - \frac{n\pi}{2}\right), \qquad n_n(x) \sim -\frac{1}{x}\cos\left(x - \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$h_n^{(1)}(x) \sim (-\mathrm{i})^{n+1}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}, \qquad h_n^{(2)}(x) \sim \mathrm{i}^{n+1}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{x}$$

והוורונסקיאן הוא:

$$j_n n_n' - n_n j_n' = \frac{1}{x^2}$$

יחסי האורתוגונליות של j_n הם:

$$\int_{-\infty}^{\infty} j_m(x)\, j_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2n+1}\delta_{mn}$$

$$\int_0^1 x^2 j_n(\alpha_{n,m}x)\, j_n(\alpha_{n,k}x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[j_{n+1}(\alpha_{n,m})\right]^2\delta_{mk}$$

כאשר $\alpha_{n,m}$ הוא האפס ה־m של j_n. עבור $f_n \in \left\{j_n, n_n, h_n^{(1)}, h_n^{(2)}\right\}$ ו־n שלם מתקיים יחס הנסיגה:

$$\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^m \left(x^{n+1}f_n(x)\right) = x^{n-m+1}f_{n-m}(x)$$

עבור n ממשי חיובי או שלם שלילי, $j_n(0) = 0$. עבור $n = 0$, $j_n(0) = 1$. עבור n שלילי, $j_n(0)$ מתבדרת למעט n חצי־שלם קטן מ־1, שם היא מתאפסת. לעומת זאת, $n_n(0)$ מתבדרת תמיד למעט n שלילי שלם.

1.6 משוואת בסל המוכללת

למשוואה:

$$y''(x) + \frac{1-2a}{x}y'(x) + \left[\left(bcx^{c-1}\right)^2 + \frac{a^2 - n^2c^2}{x^2}\right]y(x) = 0$$

קיימים הפתרונות:

$$y(x) = x^a J_{\pm n}\left(bx^c\right)$$

כאשר כרגיל, עבור n שלם אחד הפתרונות הבלתי־תלויים צריך להיות מוחלף בפונקציית נוימן.

2 פונקציות גמא, בטא ופונקציות קשורות

2.1 פונקציית גמא, Γ

פונקציית גמא (Gamma) מרחיבה את פונקציית העצרת למספרים לא טבעיים:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) = z!$$

עבור z שאינו מספר שלם אי־חיובי ($z \notin -\mathbb{N}_0$) ניתן להגדיר:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}\frac{n^z}{z}$$

עבור $\mathrm{Re}(z) > 0$ ניתן להגדיר:

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t\\ &= 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}t^{2z-1}\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1\left[\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right]^{z-1}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

הגדרה באמצעות מכפלה אינסופית היא:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\mathrm{e}^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)\mathrm{e}^{-z/n}$$

כאשר $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) - \ln n\right] \approx 0.577$ הוא קבוע אוילר־מסקרוני (Euler-Mascheroni). זהויות חשובות הן:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

$$\Gamma(1+z)\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right) = 2^{-2z}\sqrt{\pi}\,\Gamma(1+2z)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right) = \frac{\pi}{\cos(\pi z)}$$

וערכים ידועים הם:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$$

עבור $n \in -\mathbb{N}_0$ (כלומר $n = 0, -1, -2\ldots$) מתקיים $\Gamma(n) \to \pm\infty$. הפיתוח האסימפטוטי (נוסחת סטירלינג) הוא:

$$n! \sim \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\sqrt{2\pi n}, \qquad n\to\infty$$

$$\Gamma(z) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{z}}\left(\frac{z}{\mathrm{e}}\right)^z, \qquad z\to\infty$$

$$\ln\Gamma(z+1) \approx \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \left(z + \frac{1}{2}\right)\ln z - z + \frac{1}{12z} - \frac{1}{360z^3}$$

סימן נפוץ הוא עצרת כפולה (Double Factorial Notation):

$$(2n+1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

$$(2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n) = 2^n n!, \qquad (-1)!! = 1$$

2.2 פונקציות דיגמא (ψ), פוליגמא ($\varphi^{(m)}$) ופונקציית גמא הלא־שלמה (γ, Γ)

פונקציית דיגמא (Digamma) מוגדרת כך:

$$\begin{aligned}\psi(z+1) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln\left[\Gamma(z+1)\right] =\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\ln n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z+k}\right) = -\gamma - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{n(n+z)}\end{aligned}$$

פונקציית פוליגמא (Polygamma) מוגדרת כך:

$$\begin{aligned}\psi^{(m)}(z+1) &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{m+1}\ln\left[\Gamma(z+1)\right]\\ &= (-1)^{m+1}\,m!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^{m+1}}\end{aligned}$$

פונקציית גמא הלא־שלמה (Incomplete) מוגדרת כך:

$$\gamma(a,x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t}t^{a-1}\mathrm{d}t$$

$$\Gamma(a,x) = \int_x^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{a-1}\mathrm{d}t$$

$$\gamma(a+1,x) = a\gamma(a,x) - x^a\mathrm{e}^{-x}$$

$$\Gamma(a+1,x) = a\Gamma(a,x) + x^a\mathrm{e}^{-x}$$

וניתנת להגדרה גם באמצעות פונקציה היפרגאומטרית (ראו להלן):

$$\gamma(a,x) = \frac{x^a}{a}\,{}_1F_1(a; a+1; -x)$$

נשים לב כי לכל x מתקיים:

$$\Gamma(a) = \gamma(a,x) + \Gamma(a,x)$$

הפיתוחים האסימפטוטיים הם:

$$\Gamma(a,x) \sim -\mathrm{e}^{-x}x^a\left(\frac{1-a}{x^2} - \frac{1}{x}\right)$$

$$\gamma(a,x) \sim \mathrm{e}^{-x}x^a\left(\frac{1-a}{x^2} - \frac{1}{x}\right) + \Gamma(a,0)$$

2.3 פונקציית בטא, B

פונקציית בטא (Beta) מוגדרת כך:

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \qquad B(m+1,n+1) = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

נשים לב כי אם $p,q \in -\mathbb{N}_0$ אז ל־$B(p,q)$ קוטב מסדר ראשון בלבד, כי המכנה "מבטל" את אחד המקטבים במונה. ניתן להגדיר אותה גם באמצעות האינטגרלים: (בסוגריים מסולסלים - החלפות משתנים מאינטגרל אחד לשני)

$$\begin{aligned}B(m+1,n+1) &= 2\int_0^{\pi/2}\cos^{2m+1}\theta\sin^{2n+1}\theta\,\mathrm{d}\theta\\ \{x=\cos\theta\} &= 2\int_0^1 x^{2m+1}\left(1-x^2\right)^n\mathrm{d}x\\ \left\{t=x^2\right\} &= \int_0^1 t^m(1-t)^n\,\mathrm{d}t\\ \left\{u=\frac{t}{1-t}\right\} &= \int_0^\infty \frac{u^m}{(1+u)^{m+n+2}}\mathrm{d}u\end{aligned}$$

מתקיים השוויון:

$$B(p,q) = B(p+1,q) + B(p,q+1)$$

הפיתוח האסימפטוטי הוא:

$$B(p,q) \sim \sqrt{2\pi}\frac{p^{p-\frac{1}{2}}q^{q-\frac{1}{2}}}{(p+q)^{p+q-\frac{1}{2}}}, \qquad p,q\to\infty$$

פונקציית בטא הלא־שלמה (Incomplete) היא:

$$B_x(p,q) = \int_0^x t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t$$

$$0\le x\le 1, \quad p>0, \quad q>0$$

2.4 אינטגרלים מעריכיים, טריגונומטריים ולוגריתמיים: $\mathbf{Ei}, \mathbf{si}, \mathbf{Ci}, \mathbf{li}, \mathbf{erf}, \mathbf{erfc}$

האינטגרל המעריכי (Exponential Integral) הוא:

$$-\mathrm{Ei}(-x) = \int_x^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t = -\gamma - \ln x - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n\cdot n!}$$

$$-\mathrm{Ei}(-x) \sim \mathrm{e}^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{k!}{x^{k+1}}, \qquad x\to\infty$$

אינטגרלי סינוס וקוסינוס (Sine, Cosine Integrals) הם:

$$\mathrm{si}(x) = -\int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t, \qquad \mathrm{Ci}(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{si}(x) \sim -\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}, \qquad \mathrm{Ci}(x) \sim \frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2}$$

ומתקיים:

$$\mathrm{Ei}(\mathrm{i}x) = \mathrm{Ci}(x) + \mathrm{i}\,\mathrm{si}(x)$$

האינטגרל הלוגריתמי (Logarithmic Integral) הוא:

$$\mathrm{li}(x) = \int_0^x \frac{1}{\ln u}\mathrm{d}u = \mathrm{Ei}(\ln x) \sim \frac{x}{\ln x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k!}{(\ln x)^k}$$

אינטגרלי השגיאה (Error Integrals) הם:

$$\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\gamma\left(\frac{1}{2}, z^2\right), \qquad \mathrm{erf}(\infty) = 1$$

$$\mathrm{erfc}(z) = 1 - \mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}, z^2\right)$$

$$\mathrm{erfc}(z) \sim \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{\sqrt{\pi}x}\left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1\cdot 3}{2^2x^4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3x^6} + \cdots\right)$$

ניתן לייצג את הפונקציות שהוגדרו לעיל באמצעות פונקציות היפרגאומטריות (ראו להלן):

$$\mathrm{Ci}(x) + \mathrm{i}\,\mathrm{si}(x) = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}U(1;1;-\mathrm{i}x)$$

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2x}{\sqrt{\pi}}\,{}_1F_1\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};-x^2\right)$$

3 פולינומי צ'בישב

3.1 פולינומי צ'בישב מהסוג הראשון, T_n

פולינומי צ'בישב מהסוג הראשון (Type I Chebyshev Polynomials) פותרים את המשוואה הדיפרנציאלית:

$$\left(1-x^2\right)y''(x) - xy'(x) + n^2y(x) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}y(\cos\theta) + n^2y(\cos\theta) = 0$$

ניתן להגדירם באמצעות הפונקציות היוצרות (עבור $|x| \le 1$, $|t| < 1$):

$$\frac{1-t^2}{1-2xt+t^2} = T_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty}T_n(x)\,t^n$$

$$\frac{1-tx}{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}T_n(x)\,t^n$$

או בצורות הבאות:

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n\sqrt{\pi}\left(1-x^2\right)^{1/2}}{2^n\left(n-\frac{1}{2}\right)!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n\left[\left(1-x^2\right)^{n-1/2}\right]$$

$$T_n(x) = \frac{1}{4\pi\mathrm{i}}\oint\frac{1-t^2}{1-2xt+t^2}\frac{1}{t^{n+1}}\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}T_n(x) &= \frac{n}{2}\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^k\frac{1}{n-k}\binom{n-k}{k}(2x)^{n-2k}\\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2k}\left(x^2-1\right)^k x^{n-2k}\end{aligned}$$

$$T_n(x) = {}_2F_1\left(-n, n; \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right)$$

הם מקיימים את יחס האורתוגונליות:

$$\int_{-1}^{1}T_m(x)\,T_n(x)\left(1-x^2\right)^{-1/2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\delta_{mn}\left(1+\delta_{00}\right)$$

ואת יחסי הנסיגה:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

$$\left(1-x^2\right)T_n'(x) = -nxT_n(x) + nT_{n-1}(x)$$

הגדרה חשובה מאוד היא ההגדרה הטריגונומטרית:

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$

כמו כן מתקיים יחס הסימטריה:

$$T_n(-x) = (-1)^n\,T_n(x)$$

מספר ערכים חשובים הם:

$$T_n(1)=1,\qquad T_{2n}(0)=(-1)^n,\qquad T_{2n+1}(0)=0$$
$$T_0(x)=1,\qquad T_1(x)=x,\qquad T_2(x)=2x^2-1$$
$$T_3(x)=4x^3-3x,\qquad T_4(x)=8x^4-8x^2+1$$
$$T_5(x)=16x^5-20x^3+5x$$

המשוואה הדיפרנציאלית הנ"ל היא מסדר שני ולכן קיים פתרון בלתי־תלוי נוסף עם יחס אורתוגונליות משלו:

$$V_n(\cos\theta)=\sin(n\theta),\quad V_n(x)=\left(1-x^2\right)^{1/2}U_{n-1}(x)$$
$$\int_{-1}^{1}V_m(x)V_n(x)\left(1-x^2\right)^{-1/2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\delta_{mn}\left(1-\delta_{00}\right)$$

כאשר U_n הוא פולינום צ'בישב מהסוג השני.

3.2 פולינומי צ'בישב מהסוג השני, U_n

פולינומי צ'בישב מהסוג השני (Type II Chebyshev Polynomials) פותרים את המשוואה הדיפרנציאלית:

$$\left(1-x^2\right)y''(x)-3xy'(x)+n(n+2)y(x)=0$$

ניתן להגדירם באמצעות הפונקציה היוצרת (עבור $|x|<1$, $|t|<1$):

$$\frac{1}{1-2xt+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}U_n(x)t^n$$

או בצורות הבאות:

$$U_n(x)=\frac{(-1)^n\sqrt{\pi}(n+1)}{2^{n+1}\left(n+\frac{1}{2}\right)!\left(1-x^2\right)^{1/2}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n\left[\left(1-x^2\right)^{n+1/2}\right]$$

$$\begin{aligned}U_n(x)&=\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^k\binom{n-k}{k}(2x)^{n-2k}\\&=\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n+1}{2k+1}\left(x^2-1\right)^k x^{n-2k}\end{aligned}$$

$$U_n(x)=(n+1)\,{}_2F_1\left(-n,n+2;\frac{3}{2};\frac{1-x}{2}\right)$$

הם מקיימים את יחס האורתוגונליות:

$$\int_{-1}^{1}U_m(x)U_n(x)\left(1-x^2\right)^{1/2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\delta_{mn}$$

ואת יחסי הנסיגה:

$$U_{n+1}(x)=2xU_n(x)-U_{n-1}(x)$$
$$\left(1-x^2\right)U_n'(x)=-nxU_n(x)+(n+1)U_{n-1}(x)$$

קיימים יחסי נסיגה המשלבים את פולינומי צ'בישב מהסוג הראשון:

$$T_n'(x)=nU_{n-1}(x)$$
$$T_n(x)=\frac{1}{2}\left[U_n(x)-U_{n-2}(x)\right]$$
$$T_{n+1}(x)=xT_n(x)-\left(1-x^2\right)U_{n-1}(x)$$
$$T_n(x)=U_n(x)-xU_{n-1}(x)$$

הגדרה חשובה מאוד היא ההגדרה הטריגונומטרית:

$$U_n(\cos\theta)=\frac{\sin\left[(n+1)\theta\right]}{\sin\theta}$$

כמו כן מתקיים יחס הסימטריה:

$$U_n(-x)=(-1)^nU_n(x)$$

מספר ערכים חשובים הם:

$$U_n(1)=n+1,\qquad U_{2n}(0)=(-1)^n,\qquad U_{2n+1}(0)=0$$
$$U_0(x)=1,\qquad U_1(x)=2x,\qquad U_2(x)=4x^2-1$$
$$U_3(x)=8x^3-4x,\qquad U_4(x)=16x^4-12x^2+1$$
$$U_5(x)=32x^5-32x^3+6x$$

המשוואה הדיפרנציאלית הנ"ל היא מסדר שני ולכן קיים פתרון בלתי־תלוי נוסף עם יחס אורתוגונליות משלו:

$$W_n(\cos\theta)=\frac{\cos\left[(n+1)\theta\right]}{\sin\theta},\quad W_n(x)=\left(1-x^2\right)^{-1/2}T_{n+1}(x)$$
$$\int_{-1}^{1}W_m(x)W_n(x)\left(1-x^2\right)^{1/2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\delta_{mn}$$

4 פולינומי הרמיט, לגר ולג'נדר, הרמוניות כדוריות

4.1 פולינומי הרמיט, H_n

פולינומי הרמיט (Hermite) פותרים את המשוואה הדיפרנציאלית:

$$y''(x)-2xy'(x)+2ny(x)=0$$
$$\left[\mathrm{e}^{-x^2}y'(x)\right]'+2n\mathrm{e}^{-x^2}y(x)=0$$

וניתן להגדיר אותם בצורות הבאות:

$$\mathrm{e}^{2tx-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

$$H_n(x)=(-1)^n\mathrm{e}^{x^2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n\mathrm{e}^{-x^2}$$

$$H_n(x)=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\oint\frac{\mathrm{e}^{2tx-t^2}}{t^{n+1}}\mathrm{d}t$$

$$H_n(x)=n!\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^k\frac{1}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k}$$

ניתן להגדירם גם באמצעות פונקציה היפרגאומטרית (כאשר $\xi\in\{0,1\}$):

$$H_{2n+\xi}(x)=\frac{(-1)^n(1+\xi)(2n+\xi)!}{n!}\,{}_1F_1\left(-n;\frac{1}{2}+\xi;x^2\right)x^{\xi}$$

הם מקיימים את יחסי האורתוגונליות, הנסיגה והסימטריה:

$$\int_{-\infty}^{\infty}H_m(x)H_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=2^n\sqrt{\pi}n!\delta_{mn}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}H_m(x)H_n(x)x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=$$
$$=2^{n-1}\sqrt{\pi}n!\left(\delta_m^{n-1}+2(n+1)\delta_m^{n+1}\right)$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}H_m(x)H_n(x)x^2\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=2^{n-2}\sqrt{\pi}n!\cdot$$
$$\cdot\left(\delta_{m,n-2}+2(2n+1)\delta_{mn}+4(n+1)(n+2)\delta_{m,n+2}\right)$$

$$H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x)$$
$$H_n'(x)=2nH_{n-1}(x)$$

$$H_n(-x)=(-1)^nH_n(x)$$

ומספר ערכים חשובים הם:

$$H_0(x)=1,\qquad H_1(x)=2x,\qquad H_2(x)=4x^2-2$$
$$H_3(x)=8x^3-12x,\qquad H_4(x)=16x^4-48x^2+12$$
$$H_5(x)=32x^5-160x^3+120x$$
$$H_6(x)=64x^6-480x^4+720x^2-120$$
$$H_7(x)=128x^7-1344x^5+3360x^3-1680x$$
$$H_8(x)=256x^8-3584x^6+13440x^4-13440x^2+1680$$

בהינתן משוואת שרדינגר המתאימה ל**אוסילטור הרמוני קוונטי**:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(z)+\frac{1}{2}m\omega^2z^2\Psi(z)=E\Psi(z)$$

ניתן להציב $x=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}z$ ו־$\lambda=\frac{2E}{\hbar\omega}$ ולקבל את המשוואה:

$$\psi''(x)+\left(\lambda-x^2\right)\psi(x)=0$$

אשר פתרונה ניתן באמצעות פולינומי הרמיט, כאשר $\lambda=2n+1$:

$$\psi_n(x)=2^{-n/2}\pi^{-1/4}(n!)^{-1/2}\mathrm{e}^{-x^2/2}H_n(x)$$

הערכים העצמיים של האנרגיה הם:

$$E_n=\frac{\lambda\hbar\omega}{2}=\frac{(2n+1)\hbar\omega}{2}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

4.2 פולינומי לגר, L_n

פולינומי לגר (Laguerre) פותרים את המשוואה הדיפרנציאלית:

$$xy''(x)+(1-x)y'(x)+ny(x)=0$$

וניתן להגדיר אותם בצורות הבאות:

$$\frac{\mathrm{e}^{-xt/(1-t)}}{(1-t)}=\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)t^n$$

$$L_n(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{n!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n\left(x^n\mathrm{e}^{-x}\right)$$

$$L_n(x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint\frac{\mathrm{e}^{-xt/(1-t)}}{(1-t)t^{n+1}}\mathrm{d}t$$

$$L_n(x)=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{n!}{(n-m)!(m!)^2}x^m$$

$$L_n(x)={}_1F_1(-n;1;x)$$

הם מקיימים את יחסי האורתוגונליות והנסיגה:

$$\int_0^{\infty}L_m(x)L_n(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\delta_{mn}$$

$$(n+1)L_{n+1}(x)=(2n+1-x)L_n(x)-nL_{n-1}(x)$$
$$xL_n'(x)=nL_n(x)-nL_{n-1}(x)$$

ומספר ערכים חשובים הם:

$$L_n(0)=1,\qquad L_0(x)=1,\qquad L_1(x)=1-x$$
$$L_2(x)=\frac{1}{2}\left(x^2-4x+2\right)$$
$$L_3(x)=\frac{1}{3!}\left(-x^3+9x^2-18x+6\right)$$
$$L_4(x)=\frac{1}{4!}\left(x^4-16x^3+72x^2-96x+24\right)$$
$$L_5(x)=\frac{1}{5!}\left(-x^5+25x^4-200x^3+600x^2-600x+120\right)$$

4.3 פולינומי לגר המוכללים, L_n^k

פולינומי לגר המוכללים (Associated) פותרים את המשוואה הדיפרנציאלית:

$$xy''(x)+(k+1-x)y'(x)+ny(x)=0$$

עבור $|x|<1$ ניתן להגדירם באמצעות הפונקציה היוצרת:

$$\frac{\mathrm{e}^{-xt/(1-t)}}{(1-t)^{k+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}L_n^k(x)t^n$$

עבור $k>-1$ ניתן להשתמש בהגדרה לפי טור חזקות:

$$L_n^k(x)=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{(n+k)!}{(n-m)!(k+m)!m!}x^m$$

צורות הגדרה נוספות הן:

$$\begin{aligned}L_n^k(x)&=(-1)^k\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^kL_{n+k}(x)\\&=\frac{\mathrm{e}^xx^{-k}}{n!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n\left(\mathrm{e}^{-x}x^{n+k}\right)\end{aligned}$$

$$L_n^k(x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint\frac{\mathrm{e}^{-xt/(1-t)}}{(1-t)^{k+1}t^{n+1}}\mathrm{d}t$$

$$L_n^k(x)=\frac{(n+k)!}{n!k!}\,{}_1F_1(-n;k+1;x)$$

הם מקיימים את יחסי האורתוגונליות והנסיגה:

$$\int_0^{\infty}L_m^k(x)L_n^k(x)\mathrm{e}^{-x}x^k\mathrm{d}x=\frac{(n+k)!}{n!}\delta_{mn}$$

$$(n+1)L_{n+1}^k=(2n+k+1-x)L_n^k-(n+k)L_{n-1}^k$$
$$x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}L_n^k=nL_n^k-(n+k)L_{n-1}^k$$

ומספר ערכים חשובים הם:

$$L_n^k(0)=\frac{(n+k)!}{n!k!},\qquad L_0^k(x)=1,\qquad L_1^k(x)=1-x+k$$
$$L_2^k(x)=\frac{1}{2}\left[x^2-2(k+2)x+(k+1)(k+2)\right]$$

4.4 פולינומי לג'נדר, P_n

פולינומי לג'נדר (Legendre) פותרים את המשוואה הדיפרנציאלית:

$$\underbrace{\left(1-x^2\right)y''(x)-2xy'(x)}_{\left[\left(1-x^2\right)y'(x)\right]'}+n(n+1)y(x)=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}y(\cos\theta)+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}y(\cos\theta)+n(n+1)y(\cos\theta)=0$$

וניתן להגדיר אותם בצורות הבאות:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$$

$$P_n(x)=\frac{1}{2^nn!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n\left(x^2-1\right)^n$$

$$P_n(x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint\frac{1}{t^{n+1}\sqrt{1-2xt+t^2}}\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}P_n(x)&=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2n-2k}{n}x^{n-2k}\\&=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}\\&=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(x-1)^{n-k}(x+1)^k\end{aligned}$$

$$P_n(x)={}_2F_1\left(-n,n+1;1;\frac{1-x}{2}\right)$$
$$P_{2n+\xi}(x)=(-1)^n\frac{(2n-1+2\xi)!!}{(2n)!!}\cdot$$
$$\cdot{}_2F_1\left(-n,n+\frac{1}{2}+\xi;\frac{1}{2}+\xi;x^2\right)x^{\xi}$$

כאשר $\xi\in\{0,1\}$. הם מקיימים את יחסי האורתוגונליות, הנסיגה והסימטריה:

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{2n+1}\delta_{mn}$$

$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0$$
$$\frac{1-x^2}{n}P_n'(x)=P_{n-1}(x)-xP_n(x)$$
$$(2n+1)P_n(x)=P_{n+1}'(x)-P_{n-1}'(x)$$

$$P_n(-x)=(-1)^nP_n(x)$$

ומספר ערכים חשובים הם:

$$P_0(x)=1,\qquad P_1(x)=x,\qquad P_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)$$
$$P_3(x)=\frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right),\qquad P_4(x)=\frac{1}{8}\left(35x^4-30x^2+3\right)$$
$$P_5(x)=\frac{1}{8}\left(63x^5-70x^3+15x\right)$$
$$P_6(x)=\frac{1}{16}\left(231x^6-315x^4+105x^2-5\right)$$
$$P_7(x)=\frac{1}{16}\left(429x^7-693x^5+315x^3-35x\right)$$

4.5 פולינומי לג'נדר המוכללים, P_l^m

פולינומי לג'נדר המוכללים פותרים את המשוואה הדיפרנציאלית:

$$\underbrace{\left(1-x^2\right)y''-2xy'(x)}_{\left[\left(1-x^2\right)y'(x)\right]'}+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y(x)=0$$
$$y''(\cos\theta)+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}y'(\cos\theta)+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{\sin\theta}\right]y(\cos\theta)=0$$

וניתן להגדיר אותם בצורות הבאות:

$$\frac{(2m)!\left(1-x^2\right)^{m/2}}{2^m m!\left(1-2xt+t^2\right)^{m+1/2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_{n+m}^m(x)\,t^n$$

$$\begin{aligned}P_l^m(x)&=(-1)^m\left(1-x^2\right)^{m/2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^m P_l(x)\\&=\frac{(-1)^m}{2^l l!}\left(1-x^2\right)^{m/2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{l+m}\left(x^2-1\right)^l\end{aligned}$$

$$P_n^m(x)=\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\cdot$$
$$\cdot\frac{\left(1-x^2\right)^{m/2}}{2^m m!}\,{}_2F_1\left(m-n,m+n+1;m+1;\frac{1-x}{2}\right)$$

הם מקיימים את יחסי האורתוגונליות, הנסיגה והסימטריה:

$$\int_{-1}^{1}P_k^m(x)\,P_l^m(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\delta_{kl}$$
$$\int_{-1}^{1}P_l^m(x)\,P_l^n(x)\,\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{(l+m)!}{m\,(l-m)!}\delta_{mn}$$

$$(1-m)\,P_l^m(x)=x\,(2l-1)\,P_{l-1}^m(x)-(l+m-1)\,P_{l-2}(x)$$

$$P_l^{-m}(x)=(-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(x)$$
$$P_{-l}^m(x)=P_{l-1}^m(x)$$
$$|m|>l\Longrightarrow P_l^m=0$$

ומספר ערכים חשובים הם:

$$\begin{aligned}
&P_0^0(x)=1\\
&P_1^{-1}(x)=\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} && P_3^{-3}=\frac{1}{48}\left(1-x^2\right)^{3/2}\\
&P_1^0(x)=x && P_3^{-2}=-\frac{1}{8}x\left(x^2-1\right)\\
&P_1^1(x)=-\sqrt{1-x^2} && P_3^{-1}=\frac{1}{8}\sqrt{1-x^2}\left(5x^2-1\right)\\
&P_2^{-2}(x)=\frac{1}{8}\left(1-x^2\right) && P_3^0=\frac{1}{2}x\left(5x^2-3\right)\\
&P_2^{-1}(x)=\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} && P_3^1=-\frac{3}{2}\sqrt{1-x^2}\left(5x^2-1\right)\\
&P_2^0(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right) && P_3^2=-15x\left(x^2-1\right)\\
&P_2^1(x)=-3x\sqrt{1-x^2} && P_3^3=-15\left(1-x^2\right)^{3/2}\\
&P_2^2(x)=-3\left(x^2-1\right)
\end{aligned}$$

4.6 הרמוניות כדוריות, Y_l^m

ההרמוניות הכדוריות (Spherical Harmonics) פותרות את המשוואה הדיפרנציאלית:

$$\frac{\Phi}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\frac{\Theta}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}+l(l+1)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\phi)=0$$

משוואה זו מתקבלת במהלך פתרון משוואת לפלס, או כל משוואה דיפרנציאלית חלקית מהצורה:

$$\nabla^2\psi+k^2 f(r)\,\psi=0$$

באמצעות הפרדת משתנים בקואורדינטות כדוריות. ההרמוניות הכדוריות מוגדרות כך:

$$Y_l^m(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)\,\mathrm{e}^{im\phi}$$

כאשר $-l\le m\le l$, ו-m,l שלמים. הפונקציות מקיימות את יחס האורתוגונליות המנורמל:

$$\begin{aligned}&\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\overline{Y_{l_1}^{m_1}}Y_{l_2}^{m_2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\\
=&\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\cos\theta=-1}^{1}\overline{Y_{l_1}^{m_1}}Y_{l_2}^{m_2}\,\mathrm{d}(\cos\theta)\,\mathrm{d}\phi\\
=&\delta_{l_1l_2}\delta_{m_1m_2}\end{aligned}$$

כאשר $\overline{Y_{l_1}^{m_1}}$ הוא הצמוד המרוכב של $Y_{l_1}^{m_1}$. מספר ערכים חשובים הם:

$$Y_0^0=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$
$$Y_1^0=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cos\theta$$
$$Y_1^{\pm1}=\mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin\theta\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\phi}$$
$$Y_2^0=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\left(3\cos^2\theta-1\right)$$
$$Y_2^{\pm1}=\mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\cos\theta\sin\theta\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\phi}$$
$$Y_2^{\pm2}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta\mathrm{e}^{\pm2\mathrm{i}\phi}$$

כמו כן מספר זהויות מיוחדות הן:

$$Y_l^{-l}=\frac{1}{2^l l!}\sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}}\sin^l\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\phi}$$
$$Y_l^0=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}P_l(\cos\theta)$$
$$Y_l^{-m}=(-1)^m\overline{Y_l^m}$$

כל פונקציה "יפה מספיק" מהצורה $f(\theta,\phi)$ ניתנת לפיתוח כסכום אינסופי של הרמוניות ספריות:

$$f(\theta,\phi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}a_{lm}Y_l^m(\theta,\phi)$$

כאשר המקדמים הם:

$$a_{lm}=\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}f\cdot\overline{Y_l^m}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

משפט החיבור (Addition Theorem) - אם γ היא הזווית בין הווקטורים (θ_1,ϕ_1) ו-(θ_2,ϕ_2), אז מתקיים:

$$P_l(\cos\gamma)=\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}Y_l^m(\theta_1,\phi_1)\,\overline{Y_l^m(\theta_2,\phi_2)}$$

5 פונקציות היפרגאומטריות

5.1 פונקציות היפרגאומטריות רגילות, ${}_2F_1$

הפונקציות ההיפרגאומטריות (Hypergeometric) פותרות את המשוואות הדיפרנציאליות (השקולות) הבאות:

$$x(1-x)\,y''(x)+\left[c-(a+b+1)\,x\right]y'(x)-aby(x)=0$$

$$\left(1-x^2\right)y''\left(x^2\right)+$$
$$-\left[\frac{1-2c}{x}+(2a+2b+1)\,x\right]y'\left(x^2\right)-4aby\left(x^2\right)$$

$$\left(1-x^2\right)y''\left(\frac{1-x}{2}\right)-aby\left(\frac{1-x}{2}\right)+$$
$$+\left[(a+b+1-2c)-(a+b+1)\,x\right]y'\left(\frac{1-x}{2}\right)$$

אם $c\notin-\mathbb{N}_0$ ניתן להגדירן באמצעות טור חזקות:

$${}_2F_1(a,b;c;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n\,(b)_n}{(c)_n}\frac{x^n}{n!}$$

כאשר:

$$\begin{aligned}(a)_n&=\underbrace{a\,(a+1)\,(a+2)\cdots(a+n-1)}_{n\text{ terms}}=\\&=\frac{(a-1+n)!}{(a-1)!}=\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}\end{aligned}$$

הוא סמל פוכהאמר (Pochhammer Symbol). קיימת גם הגדרה אינטגרלית ל-${}_2F_1(a,b;c;x)$:

$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tx)^{-a}\,\mathrm{d}t$$

ערך ידוע (בנקודה $x=1$) הוא:

$${}_2F_1(a,b;c;1)=\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)},\quad c\notin-\mathbb{N}_0$$

והפיתוח האסימפטוטי הוא:

$${}_2F_1\sim\Gamma(c)\left[\frac{(-x)^{-a}\,\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-a)}+\frac{(-x)^{-b}\,\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-b)}\right]$$

המשוואה היא מסדר שני, לכן קיים פתרון בלתי-תלוי נוסף (כאשר $c\neq2,3,4,\ldots$):

$$y(x)=x^{1-c}{}_2F_1(a+1-c,b+1-c;2-c;x)$$

5.2 פונקציות היפרגאומטריות מתלכדות, ${}_1F_1$

הפונקציות ההיפרגאומטריות המתלכדות (Confluent) פותרות את המשוואות הדיפרנציאליות (השקולות) הבאות:

$$x\,{}_1F_1''(x)+(c-x)\,{}_1F_1'(x)-a\,{}_1F_1(x)=0$$
$${}_1F_1\left(x^2\right)''+\left(\frac{2c-1}{x}-2x\right){}_1F_1\left(x^2\right)'-4a\,{}_1F_1\left(x^2\right)=0$$

אם $c\notin-\mathbb{N}_0$ ניתן להגדירן באמצעות טור חזקות:

$${}_1F_1(a;c;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(c)_n}\frac{x^n}{n!}$$

קיימת גם הגדרה אינטגרלית (עבור $\mathrm{Re}(c)>\mathrm{Re}(a)>0$):

$${}_1F_1(a;c;x)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)}\int_0^1\mathrm{e}^{xt}t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\,\mathrm{d}t$$
$$U(a;c;x)=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-xt}t^{a-1}(1+t)^{c-a-1}\,\mathrm{d}t$$

כאשר U הוא הפתרון הבלתי-תלוי השני של המשוואה הדיפרנציאלית, המוגדר כך ($c\notin\mathbb{Z}$):

$$U(a;c;x)=\frac{\pi}{\sin(\pi c)}\left[\frac{{}_1F_1(a;c;x)}{(a-c)!\,(c-1)!}+\right.$$
$$\left.-\frac{x^{1-c}{}_1F_1(a+1-c;2-c;x)}{(a-1)!\,(1-c)!}\right]$$

צורה פחות נפוצה של הפתרון השני היא (כאשר $c\neq2,3,4,\ldots$):

$$y(x)=x^{1-c}{}_1F_1(a+1-c,2-c,x)$$

להלן מספר זהויות חשובות ופיתוח אסימפטוטי:

$$\begin{aligned}&{}_1F_1(a;c;x)=\mathrm{e}^x{}_1F_1(c-a;c;-x)\\
&U(a;c;x)=x^{1-c}U(a-c+1;2-c;x)\\
&(2a-c+x)\,{}_1F_1(a;c;x)=\\
&=a\,{}_1F_1(a+1;c;x)+(a-c)\,{}_1F_1(a-1;c;x)\\
&{}_1F_1(a;c;x)\sim\Gamma(c)\left[\frac{\mathrm{e}^x x^{a-c}}{\Gamma(a)}+\frac{(-x)^{-a}}{\Gamma(c-a)}\right]\end{aligned}$$

פונקציות ויטקר (Whittaker) פותרות את המשוואה הדיפרנציאלית הצמודה לעצמה:

$$y''(x)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{k}{x}+\frac{\frac{1}{4}-\mu^2}{x^2}\right)y(x)=0$$

והן מוגדרות כך:

$$M_{k\mu}(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}x^{\mu+\frac{1}{2}}{}_1F_1\left(\mu-k+\frac{1}{2};2\mu+1;x\right)$$
$$W_{k\mu}(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}x^{\mu+\frac{1}{2}}U\left(\mu-k+\frac{1}{2};2\mu+1;x\right)$$

5.3 פונקציות היפרגאומטריות מתלכדות גבוליות, ${}_0F_1$

הפונקציות ההיפרגאומטריות המתלכדות הגבוליות (Confluent Hypergeometric Limit Function) פותרות את המשוואה הדיפרנציאלית:

$$xy''(x)+ay'-y=0$$

הן מוגדרות כך:

$${}_0F_1(;a;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(a)_n}\frac{x^n}{n!}$$

ניתן להגדירן גם כמקרה גבול של הפרמטר הראשון של הפונקציות ההיפרגאומטריות המתלכדות (ומכאן שמן):

$${}_0F_1(;a;x)=\lim_{q\to\infty}{}_1F_1\left(q;a;\frac{x}{q}\right)$$

קיים ייצוג של פונקציות בסל כפונקציה מסוג זה:

$$J_n(x)=\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n{}_0F_1\left(;n+1;-\frac{1}{4}x^2\right)$$

6 שונות

6.1 פונקציות איירי, $\mathbf{Ai},\mathbf{Bi}$

פונקציות איירי (Airy) פותרות את משוואת איירי:

$$y''(x)-xy(x)=0$$

והן מוגדרות כך:

$$\mathrm{Ai}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\left(\frac{1}{3}t^3+xt\right)\mathrm{d}t$$
$$\mathrm{Bi}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\exp\left(-\frac{1}{3}t^3+xt\right)+\sin\left(\frac{1}{3}t^3+xt\right)\right]\mathrm{d}t$$

מספר ערכים מיוחדים הם:

$$\mathrm{Ai}(0)=\frac{1}{3^{2/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)},\qquad\mathrm{Ai}'(0)=-\frac{1}{3^{1/3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}$$
$$\mathrm{Bi}(0)=\frac{1}{3^{1/6}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)},\qquad\mathrm{Bi}'(0)=\frac{1}{3^{-1/6}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}$$

עבור $x>0$, הפונקציה $\mathrm{Ai}\left(x\right)$ חיובית ודועכת מעריכית לאפס, בעוד $\mathrm{Bi}\left(x\right)$ חיובית ושואפת מעריכית לאינסוף. עבור $x<0$, שתי הפונקציות מתנדנדות סביב אפס בתדירות גדלה והולכת ובמשרעת קטנה והולכת.
הפיתוחים האסימפטוטיים הם:

$$\mathrm{Ai}\left(x\right)\sim\frac{\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}x^{3/2}}}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}},\qquad\mathrm{Ai}\left(-x\right)\sim\frac{\sin\left(\frac{2}{3}x^{3/2}+\frac{1}{4}\pi\right)}{\sqrt{\pi}x^{1/4}}$$
$$\mathrm{Bi}\left(x\right)\sim\frac{\mathrm{e}^{\frac{2}{3}x^{3/2}}}{\sqrt{\pi}x^{1/4}},\qquad\mathrm{Bi}\left(-x\right)\sim\frac{\cos\left(\frac{2}{3}x^{3/2}+\frac{1}{4}\pi\right)}{\sqrt{\pi}x^{1/4}}$$

כמו כן, עבור $x>0$ מתקיים:

$$\mathrm{Ai}\left(x\right)=\sqrt{\frac{x}{9}}\left[I_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)-I_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)\right]$$
$$\mathrm{Bi}\left(x\right)=\sqrt{\frac{x}{3}}\left[I_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)+I_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)\right]$$

כאשר I_n היא פונקציית בסל המותאמת מהסוג הראשון, ועבור $x<0$ מתקיים:

$$\mathrm{Ai}\left(-x\right)=\sqrt{\frac{x}{9}}\left[J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)+J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)\right]$$
$$\mathrm{Bi}\left(-x\right)=\sqrt{\frac{x}{3}}\left[J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)-J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)\right]$$

כאשר J_n היא פונקציית בסל הרגילה מהסוג הראשון.

6.2 פונקציית זטא של רימן, ζ

פונקציית זטא של רימן מוגדרת כך:

$$\zeta\left(s\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}}$$

ובאמצעות המשכה אנליטית ניתן להראות כי:

$$\zeta\left(-1\right)=-\frac{1}{12}$$

6.3 המרה בין ייצוגים של פונקציות

תהי:

$$g\left(x,t\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_{n}\left(x\right)t^{n}$$

פונקציה יוצרת של פונקציה f_n כלשהי. אז מתקיים:

$$\begin{aligned}f_{n}\left(x\right) & = \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n}g\left(x,t\right)\Big|_{t=0}\\ & = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint\frac{g\left(x,t\right)}{t^{n+1}}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

6.4 ורונסקיאן

תהי המשוואה:

$$y''+p\left(x\right)y'+q\left(x\right)y=0$$

אז הוורונסקיאן של שני הפתרונות y_1,y_2 הוא:

$$\begin{aligned}W\left(y_{1},y_{2}\right) & = y_{1}y_{2}'-y_{1}'y_{2}\\ & = C\exp\left(-\int p\left(x\right)\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

כאשר את הקבוע C ניתן למצוא באמצעות הצבת נקודה נוחה (למשל $x=0$) ופיתוח לאיבר ראשון בלבד בטור טיילור. בנוסף מתקיים הקשר:

$$y_{2}=y_{1}\int\frac{W}{y_{1}^{2}}\mathrm{d}x$$

חלק II

פיתוחים אסימפטוטיים ושיטת WKB

7 פיתוחים אסימפטוטיים

7.1 אינטגרציה בחלקים

הדרך הפשוטה ביותר לקבל קירוב לערך של אינטגרל כאשר $x\to\infty$ היא באמצעות אינטגרציה בחלקים. לדוגמה:

$$\begin{aligned}\int_{x}^{\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{a-1}\mathrm{d}t & = -\mathrm{e}^{-t}t^{a-1}\Big|_{x}^{\infty}+\int_{x}^{\infty}\mathrm{e}^{-t}\left(a-1\right)t^{a-2}\mathrm{d}t\\ & = \mathrm{e}^{-x}x^{a-1}-\mathrm{e}^{-t}\left(a-1\right)t^{a-2}\Big|_{x}^{\infty}\\ & \quad+\int_{x}^{\infty}\mathrm{e}^{-t}\left(a-1\right)\left(a-2\right)t^{a-3}\mathrm{d}t\\ & = \mathrm{e}^{-x}x^{a-1}+\mathrm{e}^{-x}\left(a-1\right)x^{a-2}\\ & \quad+\mathrm{e}^{-x}\left(a-1\right)\left(a-2\right)x^{a-3}+\ldots\\ & \approx \mathrm{e}^{-x}x^{a}\left(\frac{1}{x}+\frac{a-1}{x^{2}}+\frac{\left(a-1\right)\left(a-2\right)}{x^{3}}\right)\end{aligned}$$

7.2 שיטת לפלס

אנו רוצים למצוא ערך מקורב לאינטגרל:

$$I\left(x\right)=\int_{a}^{b}\mathrm{e}^{xf\left(t\right)}\mathrm{d}t$$

כאשר $x\to\infty$ והגבולות a,b עשויים להיות אינסופיים. נניח כי ל־$f\left(t\right)$ יש מקסימום גלובלי בנקודה $t_0\in\left(a,b\right)$, כלומר $f\left(t_0\right)\geq f\left(t\right)$ לכל $t\in\left(a,b\right)$. הכפלה של הפונקציה במספר גדול מאוד $x\to\infty$ תגדיל עוד יותר את ההפרש, ולקיחת האקספוננט של התוצאה רק תחמיר את המצב עוד יותר. מכאן, רוב התרומה לאינטגרל באה מסביבה אינפיניטסימלית של t_0, ואת כל שאר התחום ניתן להזניח. נפתח את $f\left(t\right)$ בטור טיילור סביב t_0:

$$f\left(t\right)\approx f\left(t_{0}\right)-\frac{1}{2}\left|f''\left(t_{0}\right)\right|\left(t-t_{0}\right)^{2}$$

(הנגזרת הראשונה מתאפסת כי זוהי נקודת קיצון, והנגזרת השנייה שלילית כי זוהי נקודת מינימום). אז נוכל לרשום:

$$\int_{a}^{b}\mathrm{e}^{xf\left(t\right)}\mathrm{d}t\approx\mathrm{e}^{xf\left(t_{0}\right)}\int_{t_{0}-\varepsilon}^{t_{0}+\varepsilon}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x\left|f''\left(t_{0}\right)\right|\left(t-t_{0}\right)^{2}}\mathrm{d}t$$

כאשר $\varepsilon>0$ הוא רדיוס הסביבה של t_0. קיבלנו גאוסיאן שדועך מהר מאוד כאשר מתרחקים מ־t_0, ולכן ניתן להרחיב את גבולות האינטגרציה ולקבל:

$$\mathrm{e}^{xf\left(t_{0}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x\left|f''\left(t_{0}\right)\right|\left(t-t_{0}\right)^{2}}\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{2\pi}{x\left|f''\left(t_{0}\right)\right|}}\mathrm{e}^{xf\left(t_{0}\right)}$$

לקבלת איברים נוספים בפיתוח האסימפטוטי אפשר לקחת איברים נוספים בפיתוח טיילור של $f\left(t\right)$. **דוגמה:** לפונקציה $-\sin^2 t$ נקודת מקסימום ב־$t_0=0$ ומתקיים:

$$-\sin^{2}t=-\left(t-\frac{t^{3}}{6}+\ldots\right)^{2}\approx-t^{2}+\frac{t^{4}}{3}$$

לכן:

$$\begin{aligned}I\left(x\right) & = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-x\sin^{2}t}\mathrm{d}t\approx\int_{0}^{\varepsilon}\mathrm{e}^{-xt^{2}}\mathrm{e}^{xt^{4}/3}\mathrm{d}t\\ & \approx \int_{0}^{\varepsilon}\mathrm{e}^{-xt^{2}}\left(1+\frac{xt^{4}}{3}\right)\mathrm{d}t\\ & = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-xt^{2}}\mathrm{d}t+\frac{x}{3}\int_{-\infty}^{\infty}t^{4}\mathrm{e}^{-xt^{2}}\mathrm{d}t\right)\\ & = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}\left(1+\frac{1}{4x}\right)\end{aligned}$$

לעתים, הנגזרת השנייה מתאפסת ולכן יש לקחת איברים נוספים בפיתוח טיילור אפילו כדי לקבל רק איבר אחד בפיתוח האסימפטוטי. **דוגמה:** לפונקציה $f\left(t\right)=-\sin^4 t$ מקסימום גלובלי בנקודה $t_0=0$. מתקיים $f''\left(t\right)=0$, לכן נפתח בטור עד האיבר הראשון שלא מתאפס:

$$-\sin^{4}t\approx-\left(t-\frac{t^{3}}{6}+\ldots\right)^{4}\approx-t^{4}$$

לכן:

$$\begin{aligned}I\left(x\right) & = \int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{-x\sin^{4}t}\mathrm{d}t\approx\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\mathrm{e}^{-xt^{4}}\mathrm{d}t\\ & \approx 2\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-xt^{4}}\mathrm{d}t=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2x^{1/4}}\end{aligned}$$

שיטת לפלס עובדת גם כאשר האינטגרל הוא מהצורה $\int_a^b g\left(t\right)\mathrm{e}^{xf\left(t\right)}$. **דוגמה (פונקציית בסל מותאמת):**

$$K_{n}\left(x\right)=\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\exp\left[-\frac{x}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right]t^{n-1}\mathrm{d}t$$

כאן $f\left(t\right)=-\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$ ומתקיים $f'\left(\pm1\right)=0$. נבחר בנקודה $t_0=1$ (כי -1 לא בתחום האינטגרציה). נפתח בטור טיילור:

$$f\left(t\right)\approx-1-\frac{1}{2}\left(t-1\right)^{2}$$

נציב באינטגרל (וכן נציב $t=1$):

$$\begin{aligned}K_{n}\left(x\right) & \approx \frac{1}{2}\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}\left(t-1\right)^{2}}\mathrm{d}t\\ & \approx \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}\left(t-1\right)^{2}}\mathrm{d}t\\ & = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\sqrt{\frac{2\pi}{x}}=\mathrm{e}^{-x}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\end{aligned}$$

7.3 שיטת הפאזה היציבה

שיטת הפאזה היציבה (Stationary Phase) משמשת לפיתוח אסימפטוטי של אינטגרלים מהצורה:

$$I\left(x\right)=\int_{a}^{b}g\left(t\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xf\left(t\right)}\mathrm{d}t$$

כאשר g,f פונקציות **ממשיות**. הרעיון הבסיסי הוא שאם נחבר אקספוננטים בעלי פאזה $f\left(t\right)$ דומה, הם יצרו "התאבכות בונה", אך אם הפאזות שונות, הן יצרו "התאבכות הורסת". בנקודה t_0 בה $f'\left(t_0\right)=0$ הפונקציה משתנה לאט, לכן נוכל לצמצם את האינטגרל לסביבה של t_0.

דוגמה:

$$I\left(x\right)=\int_{0}^{1}\cos\left(xt^{4}\right)\tan t\,\mathrm{d}t=\mathrm{Re}\left(\int_{0}^{1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt^{4}}\tan t\,\mathrm{d}t\right)$$

לפונקציה $f\left(t\right)=t^4$ נקודה יציבה ב־$t_0=0$. בסביבת נקודה זו $\tan t\approx t$. לכן (עם החלפת המשתנים $y=\mathrm{i}xt^4$):

$$\begin{aligned}I\left(x\right) & = \mathrm{Re}\left(\int_{0}^{\varepsilon}\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt^{4}}t\,\mathrm{d}t\right)\\ & = \mathrm{Re}\left(\int_{0}^{\mathrm{i}x\varepsilon^{4}}\mathrm{e}^{y}\left(\frac{y}{\mathrm{i}x}\right)^{1/4}\frac{y^{-3/4}}{4\left(\mathrm{i}x\right)^{1/4}}\mathrm{d}y\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\end{aligned}$$

7.4 שיטת נקודת האוכף / המורד התלול

שיטת נקודת האוכף (Saddle Point) או המורד התלול (Steepest Descent) היא הכללה של שיטת לפלס ומשמשת לפיתוח אסימפטוטי של אינטגרלים מרוכבים. נדגים באמצעות ההצגה האינטגרלית של פונקציית איירי $\mathrm{Ai}\left(x\right)$. ראשית נבצע החלפת משתנים $t=\sqrt{x}z$ ואז $y=x^{3/2}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ai}\left(x\right) & = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t/3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{x}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^{3/2}\left(z^{3}/3+z\right)}\mathrm{d}z\\ & = \frac{y^{1/3}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y\left(z^{3}/3+z\right)}\mathrm{d}z\end{aligned}$$

זהו אינטגרל מהצורה $\int g\left(z\right)\mathrm{e}^{yf\left(z\right)}\mathrm{d}z$ כאשר $g\left(z\right)=1$ ו־$f\left(z\right)=\mathrm{i}\left(\frac{1}{3}z^3+z\right)$. מתקיים $f'\left(\pm\mathrm{i}\right)=0$ ולכן $\pm\mathrm{i}$ הן נקודות אוכף. נחפש מסלול במישור המרוכב שמגיע מ־$-\infty$ ל־$+\infty$ ועובר דרך אחת משתי נקודות האוכף. מאחר שמתקיים $f\left(\pm\mathrm{i}\right)=\mp\frac{2}{3}$ נבחר לעבור דרך הנקודה $z_0=+\mathrm{i}$ (החלק הממשי של f חייב להיות שלילי, אחרת האינטגרל מתבדר - נזכור כי $y\to+\infty$). המסלול שלנו יעבור לאורך הציר הממשי, אך באזור הראשית הוא יסטה מעט כדי לעבור דרך i. באופן כללי המסלול צריך להיות $z=z_0+x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ כאשר הזווית θ נקבעת לפי $\theta=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arg f''\left(z_0\right)$. במקרה שלנו $f''\left(\mathrm{i}\right)=-2\equiv2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$, לכן $\theta=0$ (בנקודת האוכף, המסלול מקביל לציר הממשי). התוצאה הכללית היא:

$$\begin{aligned}I\left(x\right) & \approx g\left(z_{0}\right)\mathrm{e}^{xf\left(z_{0}\right)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\int_{a}^{b}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}s\left|f''\left(z_{0}\right)\right|x^{2}}\mathrm{d}x\\ & = \frac{\sqrt{2\pi}g\left(z_{0}\right)\mathrm{e}^{xf\left(z_{0}\right)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\sqrt{\left|xf''\left(z_{0}\right)\right|}}\end{aligned}$$

ובמקרה שלנו:

$$\mathrm{Ai}\left(y\right)\approx\frac{y^{1/3}}{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{y}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}y}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}y^{1/6}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}y}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}x^{3/2}}$$

8 שיטת WKB

8.1 מבוא

שיטת WKB משמשת לקבלת פתרונות מקורבים למשוואת שרדינגר (Schrödinger) החד־ממדית והבלתי־תלויה־בזמן:

$$-\frac{\hbar^{2}}{2m}\frac{\mathrm{d}^{2}\psi}{\mathrm{d}x^{2}}+V\left(x\right)\psi=E\psi$$

ולכל משוואה שניתן להמיר אותה למשוואת שרדינגר מהצורה הכללית $\psi''+q\left(x\right)\psi=0$. נניח כי חלקיק בעל אנרגיה E עובר באזור בו הפוטנציאל V הוא קבוע. אם $E>V$, אז פונקציית הגל תהיה מהצורה:

$$\psi\left(x\right)=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}+B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx},\qquad k\equiv\frac{\sqrt{2m\left(E-V\right)}}{\hbar}$$

כאשר $+$ במעריך מייצג תנועה לצד ימין. פונקציית הגל הזו היא מתנודדת עם אורך־גל קבוע $\lambda=\frac{2\pi}{k}$ ומשרעת קבועה. כעת, אם $V\left(x\right)$ אינו קבוע, אך משתנה לאט ביחס ל־λ, אז הגיוני להניח כי ψ נשארת מתנודדת בקירוב, אך עם אורך גל ומשרעות שמשתנות לאט. בדומה, אם $E<V$ אז נקבל פתרון מעריכי:

$$\psi\left(x\right)=A\mathrm{e}^{\kappa x}+B\mathrm{e}^{-\kappa x},\qquad\kappa\equiv\frac{\sqrt{2m\left(V-E\right)}}{\hbar}$$

ולכן אם $V\left(x\right)$ משתנה לאט ψ תהיה מעריכית בקירוב.

8.2 "התחום הקלאסי": $E>V$

את משוואת שרדינגר ניתן לכתוב גם כך:

$$\psi''\left(x\right)+\frac{p^{2}}{\hbar^{2}}\psi\left(x\right)=0,\qquad p\left(x\right)\equiv\sqrt{2m\left[E-V\left(x\right)\right]}$$

נסמן $q=\frac{p}{\hbar}$ ונניח כי מתקיים תנאי הקירוב הבא:

$$\left|\frac{1}{q}\frac{\mathrm{d}\ln q}{\mathrm{d}x}\right|=\left|\frac{1}{q^{2}}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{q}\right)\right|\ll1$$

נשים לב כי p הוא התנע הקלאסי. התחום בו $E>V\left(x\right)$, כלומר p ממשי, נקרא "התחום הקלאסי". נרשום את ψ במונחי המשרעת והפאזה שלה:

$$\psi\left(x\right)=A\left(x\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi\left(x\right)}$$

נציב במשוואה ונקבל בסופו של דבר את המשוואות:

$$A''=A\left[\left(\phi'\right)^{2}-\frac{p^{2}}{\hbar^{2}}\right],\qquad\left(A^{2}\phi'\right)'=0$$

משוואות אלה ביחד שקולות לחלוטין למשוואת שרדינגר המקורית. פתרון המשוואה הימנית (המדויק) הוא:

$$A=\frac{C}{\sqrt{\phi'}}$$

כאשר C קבוע ממשי. לפתרון המשוואה השנייה, נניח כי המשרעת A משתנה לאט, ולכן הנגזרת השנייה A'' זניחה. כך נקבל את הפתרון המקורב הבא למשוואה השמאלית:

$$\phi = \pm\frac{1}{\hbar}\int p(x)\,\mathrm{d}x$$

ולכן הפתרון המקורב למשוואת שרדינגר הוא:

$$\psi(x) \approx \frac{C_\pm}{\sqrt{p(x)}}\exp\left(\pm\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int p(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

כאשר הסימון $\pm$ מציין שהפתרון המלא הוא צירוף לינארי של המעריך החיובי והשלילי, ו־C_+, C_- הם עכשיו קבועים מרוכבים. את גבולות האינטגרל ניתן לקבוע כרצוננו, משום שכל קבוע אינטגרציה ייספג ב־$C_\pm$. נשים לב כי:

$$|\psi(x)|^2 \approx \frac{|C|^2}{p(x)}$$

כלומר ההסתברות למציאת החלקיק בנקודה x נמצאת ביחס הפוך לתנע באותה נקודה - כפי שניתן לצפות, משום שהחלקיק אינו נשאר הרבה זמן בנקודות בהן מהירותו גבוהה יחסית.

בעיה לדוגמה (בור פוטנציאל בעל שני קירות אנכיים): נניח כי הפוטנציאל הוא פונקציה $V(x)$ כלשהי עבור $0 < x < a$, ו־∞ בכל מקום אחר. אם מתקיים $E > V(x)$ בתוך הבור, נקבל:

$$\psi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{p(x)}}\left(C_1\sin\phi(x) + C_2\cos\phi(x)\right)$$

כאשר המרנו את האקספוננט המרוכב בפונקציות טריגונומטריות וקבענו:

$$\phi = \frac{1}{\hbar}\int_0^x p(x)\,\mathrm{d}x$$

נשים לב כי בהכרח $\psi(0) = 0$ ולכן $C_2 = 0$. בדומה, $\psi(a) = 0$ ולכן $\phi(a) = n\pi$ כאשר n שלם וחיובי. מכאן נקבל את הקוונטיזציה:

$$\int_0^a p(x)\,\mathrm{d}x = n\pi\hbar$$

באמצעות פתירת האינטגרל נקבל (בקירוב) את רמות האנרגיה המותרות.

8.3 "התחום הלא־קלאסי": $E < V$

כאן הפיתוח זהה, אך הפעם התנע $p(x)$ יהיה מדומה ופונקציית הגל תהיה ממשית:

$$\psi(x) \approx \frac{C_\pm}{\sqrt{|p(x)|}}\exp\left(\pm\frac{1}{\hbar}\int|p(x)|\,\mathrm{d}x\right)$$

בעיה לדוגמה (הסתברות מנהור): נניח כי הפוטנציאל הוא פונקציה $V(x)$ כלשהי עבור $0 < x < a$, ו־0 בכל מקום אחר. משמאל למכשול ($x < 0$) מתקיים:

$$\psi(x) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$$

כאשר A היא המשרעת של הגל הפוגע, B של הגל המוחזר ו־$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$. מימין למכשול ($x > a$) מתקיים:

$$\psi(x) = F\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

כאשר F היא משרעת הגל המועבר. הסתברות המנהור היא:

$$T = \frac{|F|^2}{|A|^2}$$

בתוך המכשול ($0 \le x \le a$), אם נניח כי $E < V(x)$, נשתמש בקירוב WKB ונקבל:

$$\psi(x) \approx \frac{C_\pm}{\sqrt{|p(x)|}}\exp\left(\pm\frac{1}{\hbar}\int_0^x|p(t)|\,\mathrm{d}t\right)$$

כעת, יחס המשרעות של הגל הפוגע והמועבר נקבע לפי הדעיכה המעריכית בתוך המכשול, כלומר בין 0 ל־a:

$$\frac{|F|}{|A|} \sim \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int_0^a|p(t)|\,\mathrm{d}t\right)$$

ולכן הסתברות המנהור היא:

$$T \approx \mathrm{e}^{-2\gamma}, \qquad \gamma \equiv \frac{1}{\hbar}\int_0^a|p(t)|\,\mathrm{d}t$$

בבעיה כללית יותר, האינטגרל צריך להיות מתחילת המכשול עד לנקודת המעבר הבאה (כלומר, רק על התחום בו $E < V(x)$).

8.4 נקודת המעבר: $E = V$, נוסחאות הקישור

נניח כי בנקודה $x = 0$ מתקיים $E = V(0)$, התחום $x < 0$ הוא קלאסי ($E > V(x)$) והתחום $x > 0$ אינו קלאסי. פתרון WKB שמצאנו הוא:

$$\psi(x) \approx \begin{cases} \frac{B}{\sqrt{p(x)}}\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_x^0 p(t)\,\mathrm{d}t\right) + & \\ +\frac{C}{\sqrt{p(x)}}\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_x^0 p(t)\,\mathrm{d}t\right) & x<0 \\ \frac{1}{\sqrt{|p(x)|}}D\exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int_0^x|p(t)|\,\mathrm{d}t\right) & x>0\end{cases}$$

כאשר את הפתרון בעל המעריך החיובי פסלנו משום שהוא מתבדר כאשר $x \to \infty$. נשים לב כי כאשר $E = V$ מתקיים $p(x) \to \infty$, ולכן פתרון WKB בוודאי אינו מתאים. אנו "נתפור" את שתי הפונקציות לאחת באמצעות קירוב לינארי של הפוטנציאל סביב $x = 0$:

$$V(x) \approx E + V'(0)\,x$$

נציב במשוואת שרדינגר ונקבל:

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi_p}{\mathrm{d}x^2} = \alpha^3\psi_p, \qquad \alpha \equiv \left[\frac{2m}{\hbar^2}V'(0)\right]^{1/3}$$

באמצעות החלפת משתנים $z = \alpha x$ נקבל:

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi_p}{\mathrm{d}z^2} = z\psi_p$$

זוהי משוואת איירי, ופתרונותיה הם פונקציות איירי (ראו לעיל):

$$\psi_p(x) = a\,\mathrm{Ai}(\alpha x) + b\,\mathrm{Bi}(\alpha x)$$

באזורי החפיפה, בהם הקירוב הלינארי תקף, מתקיים:

$$p(x) \approx \hbar\alpha^{3/2}\sqrt{-x}$$

בתחום $x > 0$ מתקיים:

$$\int_0^x|p(t)|\,\mathrm{d}t \approx \frac{2}{3}\hbar(\alpha x)^{3/2}$$

ולכן:

$$\psi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{\hbar}\alpha^{3/4}x^{1/4}}D\exp\left(-\frac{2}{3}(\alpha x)^{3/2}\right)$$

מצד שני, בתחום זה, תוך שימוש בפיתוח האסימפטוטי של פונקציות איירי, פונקציית התפירה תהיה:

$$\psi_p(x) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}(\alpha x)^{1/4}}\left(\frac{a}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}(\alpha x)^{3/2}} + b\mathrm{e}^{\frac{2}{3}(\alpha x)^{3/2}}\right)$$

מהשוואת הביטויים נקבל:

$$a = \sqrt{\frac{4\pi}{\alpha\hbar}}D, \qquad b = 0$$

בדומה, בתחום $x < 0$ מתקיים:

$$\int_x^0 p(t)\,\mathrm{d}t \approx \frac{2}{3}\hbar(-\alpha x)^{3/2}$$

ולכן:

$$\psi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{\hbar}\alpha^{3/4}x^{1/4}}\left[B\exp\left(\mathrm{i}\frac{2}{3}(-\alpha x)^{3/2}\right) + \right. \\ \left. +C\exp\left(-\mathrm{i}\frac{2}{3}(-\alpha x)^{3/2}\right)\right]$$

הפעם נשתמש בפיתוח האסימפטוטי של פונקציות איירי עבור $x \to -\infty$ ונקבל (כאשר נזכור כי כבר מצאנו $b = 0$):

$$\begin{aligned}\psi_p(x) &\approx \frac{a}{\sqrt{\pi}(-\alpha x)^{1/4}}\sin\left[\frac{2}{3}(-\alpha x)^{3/2}+\frac{\pi}{4}\right] \\ &= \frac{a}{2\mathrm{i}\sqrt{\pi}(-\alpha x)^{1/4}}\cdot \\ &\quad \cdot\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2}{3}(-\alpha x)^{3/2}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2}{3}(-\alpha x)^{3/2}}\right]\end{aligned}$$

מהצבת ה־a שמצאנו והשוואת הביטויים נקבל את **נוסחאות הקישור**:

$$B = -\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}D, \qquad C = \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}D$$

מכאן נוכל לקבל ביטוי כללי לפתרון, כאשר נקודת המעבר היא בנקודה $x = a$ כללית ו־D הוא קבוע שרירותי:

$$\psi(x) \approx \begin{cases} \frac{2D}{\sqrt{p(x)}}\sin\left(\frac{1}{\hbar}\int_x^a p(t)\,\mathrm{d}t + \frac{\pi}{4}\right) & x<a \\ \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}}\exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int_a^x|p(t)|\,\mathrm{d}t\right) & x>a\end{cases}$$

נשים לב כי פתרון זה מתאים לפוטנציאל שעולה בנקודת המעבר; הפתרון המתאים לפוטנציאל יורד הוא:

$$\psi(x) \approx \begin{cases} \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}}\exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int_x^a|p(t)|\,\mathrm{d}t\right) & x<a \\ \frac{2D}{\sqrt{p(x)}}\sin\left(\frac{1}{\hbar}\int_a^x p(t)\,\mathrm{d}t + \frac{\pi}{4}\right) & x>a\end{cases}$$

באופן כללי רואים כי הפתרון תמיד מתנודד בתחום הקלאסי ($E > V(x)$) ומעריכי בתחום הלא־קלאסי.

בעיה לדוגמה (בור פוטנציאל עם קיר אנכי אחד): נתון בור פוטנציאל בעל קיר ($V = \infty$) ב־$x = 0$, כאשר עבור $x > 0$ הפוטנציאל מתחיל מתחת ל־E ועולה, עם נקודת מעבר ב־a. ברור כי $\psi(0) = 0$ ולכן מהמשוואה לעיל נקבל את תנאי הקוונטיזציה:

$$\int_x^a p(t)\,\mathrm{d}t = \left(n - \frac{1}{4}\right)\pi\hbar$$

בעיה לדוגמה (בור פוטנציאל ללא קירות אנכיים): נניח כי מתקיים $E > V(x)$ עבור $x_1 \le x \le x_2$ ו־$E < V(x)$ אחרת (בור פוטנציאל בצורת "פרבולה" עם נקודות מעבר ב־x_1, x_2, כאשר הפוטנציאל יורד ב־x_1 ועולה ב־x_2). נתבונן בנקודה x בתוך הבור. מצד אחד, הנקודה היא מימין לנקודה x_1 בה הפוטנציאל יורד ולכן:

$$\psi(x) \approx \frac{-2D_1}{\sqrt{p(x)}}\sin\theta_1, \qquad \theta_1 = -\frac{1}{\hbar}\int_{x_1}^x p(t)\,\mathrm{d}t + \frac{\pi}{4}$$

("הוצאנו" מינוס מהסינוס להקלת החישובים בהמשך) מצד שני, הנקודה היא משמאל לנקודה x_2 בה הפוטנציאל עולה ולכן:

$$\psi(x) \approx \frac{2D_2}{\sqrt{p(x)}}\sin\theta_2, \qquad \theta_2 = \frac{1}{\hbar}\int_x^{x_2}p(t)\,\mathrm{d}t + \frac{\pi}{4}$$

אך צריך להתקיים $\theta_2 = \theta_1 + n\pi$ (ולא 2π - סימני מינוס יכולים להיספג בקבועים!) ולכן:

$$\int_{x_1}^{x_2}p(t)\,\mathrm{d}t = \left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\hbar$$

כאשר $n > 0$. ממשוואה זו נוכל לחלץ את האנרגיות המותרות במערכת.

חלק III
חשבון וריאציות, סימטריות וחוקי שימור

9 חשבון וריאציות

9.1 משתנה תלוי אחד ומשתנה בלתי־תלוי אחד

חשבון הווריאציות משמש למציאת נקודות יציבות (Stationary points ־ מינימום, מקסימום או פיתול) של פונקציונלים - יצורים מתמטיים אשר מקבלים פונקציה ומחזירים מספר כלשהו. נקודה יציבה של פונקציונל תהיה פונקציה, כפי שנקודה יציבה של פונקציה תהיה מספר.

המקרה הפשוט ביותר הוא הפונקציונל:

$$J = \int_{x_1}^{x_2}f(y,y',x)\,\mathrm{d}x$$

כאשר y היא פונקציה של x. y נקרא המשתנה התלוי ואילו x הוא המשתנה הבלתי־תלוי. הפונקציה f ידועה ואנו מחפשים את הפונקציה $y(x)$ שתגרום ל־J להיות מינימלי (או מקסימלי או נקודת פיתול). נניח כי קיימת פונקציה כזאת. הפונקציה מגדירה למעשה מסלול במישור xy. ההבדל בין המסלול האופטימלי $y(x)$ לבין מסלול אחר, קרוב אליו, הוא הווריאציה δy. נגדיר פונקציה $\eta(x)$ המייצגת את השינוי במסלול. הפונקציה מקיימת $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ כי נקודות ההתחלה והסיום של המסלול חייבות להיות קבועות. אז מתקיים:

$$y(x,\alpha) = y(x,0) + \alpha\eta(x)$$

כאשר α הוא פקטור שקובע את גודל השינוי ($\alpha = 0$ יחזיר אותנו למסלול האופטימלי). הווריאציה היא:

$$\delta y = y(x,\alpha) - y(x,0) = \alpha\eta(x)$$

כעת נוכל לרשום את J כפונקציה של הפקטור α:

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2}f\left(y(x,\alpha), y'(x,\alpha), x\right)\mathrm{d}x$$

אז בנקודה היציבה מתקיים, בצורה אנלוגית לנקודה יציבה של פונקציה רגילה:

$$\left.\frac{\partial J}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$$

כעת, מכלל השרשרת, אינטגרציה בחלקים ושימוש בתנאי השפה של $\eta(x)$ נקבל את התנאי:

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial\alpha} &= \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial\alpha}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'}\eta'(x)\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]\eta(x)\,\mathrm{d}x = 0\end{aligned}$$

לעתים נתקל בהגדרה החלופית (הנובעת מהשוויון $\delta y = \delta\alpha\eta(x)$):

$$\delta J = \delta\alpha\left.\frac{\partial J}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]\delta y\,\mathrm{d}x = 0$$

כעת, מאחר ש־$\eta(x)$ פונקציה שרירותית, נקבל את התנאי לנקודה יציבה - **משוואת אוילר־לגרנג' (Euler-Lagrange)**:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)$$

הערה חשובה: הנגזרת $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ היא **נגזרת שלמה, ולא חלקית!** לעתים יש צורך להשתמש בכלל השרשרת בעת הגזירה.

משוואה שקולה היא **זהות בלטרמי (Beltrami)**:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right)$$

והיא שימושית במיוחד כאשר f אינה תלויה ב־x, כי אז נקבל:

$$f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} = C$$

כאשר C קבוע אינטגרציה.

בעיה לדוגמה (חרוז מחליק - Brachistochrone Problem): נמצא את המסלול בו יחליק חרוז תחת השפעת הכבידה בזמן הקצר ביותר. זמן ההחלקה של החרוז ניתן על־ידי הפונקציונל:

$$t = \int_a^b\frac{\mathrm{d}s}{v}$$

כאשר $\mathrm{d}s$ הוא אלמנט אורך של המסלול ו־v היא המהירות. משימור האנרגיה נקבל $\frac{1}{2}mv^2 = mgy$ ולכן $v = \sqrt{2gy}$. ממשפט פיתגורס נקבל $\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x$ מכאן:

$$t = \int_a^b \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_a^b \sqrt{\frac{1+(y')^2}{y}}\mathrm{d}x$$

נשים לב כי האינטגרנד f אינו תלוי ב־x. מתקיים:

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+(y')^2}}$$

לכן נקבל מזהות בלטרמי:

$$\sqrt{\frac{1+(y')^2}{y}} - y'\frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+(y')^2}} = C$$

ומכאן, לאחר סידור איברים:

$$y\left(1+(y')^2\right) = \frac{1}{C^2} \equiv k^2$$

פתרון המשוואה הדיפרנציאלית הוא:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}k^2(\theta - \sin\theta) \\ y = \frac{1}{2}k^2(1-\cos\theta) \end{cases}$$

מערכת משוואות זו מתארת ציקלואיד (עקומה הנוצרת על ידי נקודה כלשהי על שפת מעגל כאשר מגלגלים אותו לאורך קו ישר).
הערה: ביטויים נפוצים בשאלות מסוג זה הם שטח פנים ונפח גוף סיבוב של פונקציה:

$$S = \int_a^b 2\pi y(x)\,\mathrm{d}l = \int_a^b 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x$$

$$V = \int_a^b \pi y^2\mathrm{d}x$$

ביטויים נוספים כגון אלמנטי אורך ואנרגיה קינטית בקואורדינטות גליליות ניתן למצוא בסוף דף הנוסחאות.

9.2 מספר משתנים תלויים

נניח כי בבעיה שלנו קיימים מספר משתנים תלויים $y_1,\ldots,y_n$ ומשתנה בלתי־תלוי אחד x. אם נסמן $\mathbf{y} = (y_1,\ldots,y_n)$ אז הפונקציונל יהיה:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(\mathbf{y},\mathbf{y}',x)\,\mathrm{d}x$$

ומשוואות אוילר־לגרנג' יהיו:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}'}, \qquad \mathbf{y}' = \frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x}$$

כאשר יש להבין את המשוואה כסט של n משוואות, אחת לכל רכיב של הווקטור $\mathbf{y}$.

9.3 מספר משתנים בלתי־תלויים

נניח כי בבעיה שלנו קיימים מספר משתנים בלתי־תלויים $x_1,\ldots,x_n$ ומשתנה תלוי אחד y. אם נסמן $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ אז הפונקציונל יהיה:

$$J = \int_\Omega f\left(y,\frac{\partial y}{\partial \mathbf{x}},\mathbf{x}\right)\mathrm{d}\mathbf{x}$$

כאשר Ω הוא משטח כלשהו. משוואת אוילר־לגרנג' תהיה:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial y_{x_i}}, \qquad y_{x_i} = \frac{\partial y}{\partial x_i}$$

9.4 מספר משתנים תלויים ובלתי־תלויים

נניח כי בבעיה שלנו קיימים מספר משתנים בלתי־תלויים $x_1,\ldots,x_n$ ומספר משתנים תלויים $y_1,\ldots,y_n$. אם נסמן $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1,\ldots,y_n)$ אז הפונקציונל יהיה:

$$J = \int_\Omega f\left(\mathbf{y},\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}},\mathbf{x}\right)\mathrm{d}\mathbf{x}$$

ומשוואות אוילר־לגרנג' יהיו:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}_{x_i}}, \qquad \mathbf{y}_{x_i} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_i}$$

כאשר שוב יש להבין את המשוואה כסט של n משוואות, אחת לכל רכיב של הווקטור $\mathbf{y}$.

9.5 נגזרות גבוהות

נניח כי בבעיה שלנו קיים משתנה אחד תלוי y ומשתנה אחד בלתי־תלוי x, והאינטגרנד מכיל נגזרות מסדר גבוה:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f\left(y,y',y'',\ldots,y^{(n)},x\right)\mathrm{d}x$$

אז משוואות אוילר־לגרנג' יהיו:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^i\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(i)}}\right)$$

9.6 אילוצים - כופלי לגרנג'

תהי $f(\mathbf{x})$ פונקציה. נקודה בה כל הנגזרות החלקיות של הפונקציה מתאפסות תהיה נקודה יציבה (מינימום, מקסימום או אוכף). נניח כי אנו רוצים למצוא נקודה יציבה של f כאשר מתקיימים האילוצים $\varphi_i(\mathbf{x}) = 0$ עבור $1 \le i \le n$. אז עלינו לפתור את מערכת המשוואות הבאה (משוואה אחת לכל רכיב של $\mathbf{x}$):

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \sum_{i=1}^n \lambda_i\frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}} = 0$$

כאשר λ_i הם כופלי לגרנג' (אחד לכל אילוץ), אשר אין צורך למצוא אותם במפורש.
בצורה אנלוגית ניתן לבצע גם חשבון וריאציות עם אילוצים. יהי הפונקציונל:

$$J = \int_\Omega f\left(\mathbf{y},\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}},\mathbf{x}\right)\mathrm{d}\mathbf{x}$$

נמצא נקודה יציבה של הפונקציונל בכפוף לאילוץ $\varphi(\mathbf{y},\mathbf{x}) = 0$. במקרה זה נגדיר פונקציה $\lambda(\mathbf{x})$ (כופל לגרנג' שתלוי ב־$\mathbf{x}$) ונבצע אינטגרציה מעל אותו תחום Ω כמו הפעולה לעיל. ברור כי מתקיים:

$$\int_\Omega \lambda(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{y},\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0$$

ולכן הווריאציה על האינטגרל מתאפסת אף היא. אופציה נוספת היא אילוץ שמגיע מלכתחילה בצורת אינטגרל:

$$\int_\Omega \varphi\left(\mathbf{y},\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}},\mathbf{x}\right)\mathrm{d}\mathbf{x} = c$$

כאשר c קבוע. במקרה זה נכפיל את האינטגרל בכופל לגרנג' λ קבוע, וקיבלנו אינטגרל מאותה צורה כמו האינטגרל עם $\lambda(\mathbf{x})$ כאשר הפעם λ היא פונקציה קבועה. נניח כי קיימים n אילוצים, אז הפונקציונל החדש שעלינו למצוא לו נקודה יציבה יהיה:

$$J' = \int_\Omega \left[f\left(\mathbf{y},\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}},\mathbf{x}\right) + \sum_{i=1}^n \lambda_i\varphi_i\right]\mathrm{d}\mathbf{x}$$

כאשר נזכיר כי λ_i עשויים להיות תלויים במשתנה הבלתי־תלוי $\mathbf{x}$ עבור אילוצים לא־אינטגרליים. כל שנותר הוא להפעיל, כרגיל, את משוואות אוילר־לגרנג' על האינטגרנד של J'.
בעיה לדוגמה (החלקה מגליל): נתון חלקיק בעל מסה m המחליק מגליל. נמצא את הזווית θ_c בה החלקיק מתנתק מהגליל (זוהי הזווית בה הכוח הרדיאלי מתאפס). האילוץ הוא $\varphi = r - l = 0$ ולכן הלגרנג'יאן "המורחב" הוא:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - mgr\cos\theta + \lambda(t)(r-l)$$

ממשוואות אוילר־לגרנג' נקבל:

$$mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta + \lambda(t) = m\ddot{r}$$

$$mgr\sin\theta = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta}$$

הפירוש הפיזיקלי של λ במקרה זה הוא הכוח הרדיאלי המופעל על החלקיק. ברור כי הכוח תלוי בזווית, לכן נוכל לרשום $\lambda = \lambda[\theta(t)]$. כעת, אם נציב $r = l$ ו־$\dot{r} = \ddot{r} = 0$ נקבל:

$$ml\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta + \lambda(\theta) = 0$$

$$mg\sin\theta = ml\ddot{\theta}$$

מגזירת המשוואה הראשונה לפי t וחלוקה ב־$\dot{\theta}$ נקבל $2ml\ddot{\theta} + mg\sin\theta + \lambda'(\theta) = 0$. נציב את המשוואה השנייה, נבצע אינטגרציה לפי t ונקבל $\lambda(\theta) = 3mg\cos\theta + C$. מאחר ש־$\lambda(0) = mg$ נקבל $C = -2mg$. לבסוף, הכוח מתאפס כאשר $\theta = \theta_c = \arccos\left(\frac{2}{3}\right)$ וזוהי הזווית שחיפשנו.
בעיה לדוגמה (משוואת שרדינגר): נמצא את הנקודות היציבות של הפעולה:

$$J = \iiint \psi^*\mathcal{H}\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

כאשר $\psi(x,y,z)$ היא פונקציית הגל ו:

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V$$

עם דרישת הנורמליזציה (ההסתברות למצוא את החלקיק בנקודה כלשהי במרחב חייבת להיות 1):

$$\iiint \psi^*\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 1$$

נשים לב כי הצמוד ψ^* נחשב משתנה תלוי נוסף ונפרד מ־ψ. באמצעות אינטגרציה בחלקים נקבל:

$$\int \psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\mathrm{d}x = -\int \frac{\partial \psi^*}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x}\mathrm{d}x$$

כאשר איבר השפה מתאפס בזכות תנאי שפה מתאימים. נוסיף את האילוץ ונקבל את הפעולה:

$$J' = \iiint \left(\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}\psi^*\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi + V\psi^*\psi - \lambda\psi^*\psi\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

כאשר כאן λ הוא מספר. ממשוואות אוילר־לגרנג' על המשתנה התלוי ψ^*:

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \psi^*} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \psi^*_{x_i}}$$

נקבל:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = \lambda\psi$$

ואנו רואים כי λ היא האנרגיה E. כאן פיתחנו למעשה את משוואת שרדינגר בכלים של חשבון וריאציות.

9.7 שדות

במקרה של פעולה על שדה:

$$J = \iiiint \mathcal{L}\left(\phi(x^\mu),\partial_\mu\phi(x^\mu)\right)\mathrm{d}^4x$$

כאשר ϕ הוא המשתנה התלוי ו־x^μ הוא המשתנה הבלתי־תלוי, משוואת אוילר־לגרנג' תהיה:

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}$$

במקרה זה צפיפות התנע מוגדרת להיות:

$$\Pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}$$

והתנע הקנוני הוא:

$$\Pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$$

9.8 שיטת ריילי־ריץ

שיטת ריילי־ריץ (Rayleigh-Ritz) משמשת למציאת ערכים עצמיים. באמצעות מציאת נקודה יציבה של הפעולה:

$$J = \int_a^b \left[p(x)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 - q(x)y^2\right]\mathrm{d}x$$

תחת האילוץ:

$$\int_a^b y^2 w(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

נקבל משוואת שטורם־ליוביל (Sturm-Liouville) מהצורה:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + qy + \lambda wy = 0$$

עם תנאי השפה $py'y\Big|_a^b = 0$, כאשר λ הוא ערך עצמי. נרשום את הפונקציונל כך:

$$F = \frac{\int_a^b \left[p(y')^2 - qy^2\right]\mathrm{d}x}{\int_a^b y^2 w\,\mathrm{d}x}$$

בצורה זו, האילוץ מופיע במכנה כתנאי נירמול (הנירמול, כמובן, שומר על הנקודות היציבות). אז מאינטגרציה בחלקים:

$$F = -\frac{\int_a^b y\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + qy\right]\mathrm{d}x}{\int_a^b y^2 w\,\mathrm{d}x}$$

וממשוואת שטורם־ליוביל:

$$F = \frac{\int_a^b y(\lambda wy)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b y^2 w\,\mathrm{d}x} = \lambda$$

מצאנו כי הערכים בנקודות היציבות של F הם בדיוק הערכים העצמיים λ_n המתאימים לפונקציות העצמיות y_n.
אם λ_0 הוא הערך העצמי הנמוך ביותר אז מתקיים $\lambda_n > \lambda_0$ לכל $n > 0$. מכאן, אם נבחר **פונקציית ניסיון** y כלשהי שמתאימה לתנאי השפה נוכל למצוא חסם עליון ל־λ_0.
דוגמה (מיתר): נתון מיתר רוטט המקיים את משוואת הערכים העצמיים:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \lambda y = 0$$

ואת תנאי השפה $y(0) = y(1) = 0$. הפתרון המדויק למשוואה הוא כמובן $y_n = \sin(n\pi x)$ כאשר $\lambda = n^2\pi^2$ והערך העצמי הנמוך ביותר הוא $\lambda_1 = \pi^2$. ננסה למצוא קירוב לערך זה באמצעות שיטת ריילי־ריץ. נבחר פונקציית ניסיון $y(x) = x(1-x)$. פונקציה זו נבחרה, כמובן, כך שהיא תתאים לתנאי השפה. במשוואה שלנו $q = 0$ ו־$p = w = 1$, והפונקציונל שלנו הוא:

$$F = \frac{\int_a^b (y')^2\,\mathrm{d}x}{\int_a^b y^2\mathrm{d}x} = \frac{\int_a^b (1-2x)^2\,\mathrm{d}x}{\int_a^b x^2(1-x)^2\,\mathrm{d}x} = \frac{1/3}{1/30} = 10$$

מכאן, אנו יכולים להיות בטוחים כי $\lambda_0 < 10$, ואכן, $\lambda_0 = \pi^2 \approx 9.87$. ניתן לשפר את ההערכה עוד יותר באמצעות פונקציית ניסיון מורכבת יותר, למשל $y = x(1-x) + tx^2(1-x)^2$, ומציאת הפרמטר t שיוביל לערך הנמוך ביותר של F.
דוגמה (משוואת שרדינגר): נשתמש בשיטת ריילי־ריץ למציאת הערך העצמי הנמוך ביותר של משוואת שרדינגר:

$$\mathcal{H}\psi = E\psi$$

הפונקציונל שלנו יהיה:

$$F = \frac{\iiint \psi^*\mathcal{H}\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint \psi^*\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

(במכנה מופיע האילוץ המוכר, לפיו סכום ההסתברויות על כל המרחב הוא 1). למשל, במקרה של אוסילטור הרמוני קוונטי חד־ממדי בעל המילטוניאן $\mathcal{H} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2$ (בהזנחת מקדמים) נקבל את המשוואה:

$$-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + x^2\psi = E\psi$$

נבחר כפונקציית ניסיון $\psi = \left(1+\alpha x^2\right)\mathrm{e}^{-x^2}$. אז:

$$F = \frac{\int \psi\mathcal{H}\psi\,\mathrm{d}x}{\int \psi^2\mathrm{d}x} = \frac{80 - 8\alpha + 43\alpha^2}{64 + 32\alpha + 12\alpha^2}$$

למציאת הערך של α אשר גורם ל־F לקבל ערך מינימלי, נגזור את התוצאה לפי α ונשווה לאפס. נקבל את המשוואה:

$$23\alpha^2 + 56\alpha - 48 = 0$$

למשוואה זו תוצאה חיובית יחידה $\alpha \approx 0.6718$. הצבתה בביטוי לעיל תיתן $F \approx 1.034$ ומכאן אנו יודעים בוודאות כי $E_0 < 1.034$ (התשובה המדויקת היא $E_0 = 1$).

10 משפט נתר

10.1 ניסוח משפט נתר

נניח כי הפעולה:

$$I=\int \mathcal{L}\left(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t\right)\mathrm{d}t$$

אינווריאנטית תחת טרנספורמציות רציפות של המשתנה הבלתי־תלוי (במקרה שלנו הזמן, t) ו/או המשתנה התלוי (במקרה שלנו הקואורדינטות המוכללות $\mathbf{q}=(q_1,\ldots,q_n)$):

$$t\to t'=t+\delta t,\qquad \mathbf{q}\to\mathbf{q}'=\mathbf{q}+\delta\mathbf{q}$$

כאשר $\delta t,\delta\mathbf{q}$ מייצגים את השינוי במשתנה והם תלויים **בפרמטר טרנספורמציה רציף** ε. אם הטרנספורמציה נתונה כפונקציה כלשהי של המשתנה המקורי ושל ε:

$$t\to t'=f\left(t,\varepsilon\right)$$

נפתח את הפונקציה בטור טיילור עד לסדר ראשון בלבד לפי הפרמטר ε, סביב הנקודה בה הטרנספורמציה היא טרנספורמציית הזהות (בדר"כ $\varepsilon=0$):

$$t'=f\left(t,\varepsilon\right)\approx f\left(t,0\right)+\frac{\partial f}{\partial\varepsilon}\left(t,0\right)\cdot\varepsilon=t+\frac{\partial f}{\partial\varepsilon}\left(t,0\right)\cdot\varepsilon$$

ונגדיר:

$$\delta t=t'-t\approx\frac{\partial f}{\partial\varepsilon}\left(t,0\right)\cdot\varepsilon$$

(הנחנו כאן כי ε אינפיניטסימלי ולכן ניתן להזניח סדרים גבוהים יותר. אם הטרנספורמציה רציפה אין כאן בעיה, כי ניתן להציג אותה כסכום של טרנספורמציות אינפיניטסימליות). משפט נתר (Noether) אומר כי הגודל הבא:

$$Q=\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{q}}}\cdot\dot{\mathbf{q}}-\mathcal{L}\right)\frac{\partial\left(\delta t\right)}{\partial\varepsilon}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{q}}}\cdot\frac{\partial\left(\delta\mathbf{q}\right)}{\partial\varepsilon}$$

נשמר, כאשר:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{q}}}\cdot\dot{\mathbf{q}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q_i}\dot q_i=\sum_{i=1}^{n}p_i\dot q_i$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{q}}}\cdot\frac{\partial\left(\delta\mathbf{q}\right)}{\partial\varepsilon}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q_i}\frac{\partial\left(\delta q_i\right)}{\partial\varepsilon}=\sum_{i=1}^{n}p_i\frac{\partial\left(\delta q_i\right)}{\partial\varepsilon}$$

כמובן שאם אין שינוי ב־t אז $\delta t=0$ והאיבר הראשון נופל, ואם אין שינוי ב־$\mathbf{q}$ אז $\delta\mathbf{q}=\mathbf{0}$ והאיבר השני נופל.
אם יש k פרמטרי טרנספורמציה: $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k$, אז נקבל מטען שמור Q_j נפרד עבור כל אחד מהם:

$$Q_j=\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{q}}}\cdot\dot{\mathbf{q}}-\mathcal{L}\right)\frac{\partial\left(\delta t\right)}{\partial\varepsilon_j}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{q}}}\cdot\frac{\partial\left(\delta\mathbf{q}\right)}{\partial\varepsilon_j}$$

או בכתיב לא־וקטורי:

$$Q_j=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q_i}\dot q_i-\mathcal{L}\right)\frac{\partial\left(\delta t\right)}{\partial\varepsilon_j}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q_i}\frac{\partial\left(\delta q_i\right)}{\partial\varepsilon}$$

נדגיש כי האינדקס j כאן מבדיל בין המטענים השמורים השונים ואילו i משמש לסכימה על כל דרגות החופש במערכת (המשתנים התלויים). עבור שינוי אחד פשוט מהצורה $q_i\to q_i+\varepsilon$, נקבל $Q=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q_i}$.

10.2 דוגמאות

שימור אנרגיה: נניח כי הלגרנג'יאן אינווריאנטי להזזה בזמן, $t\to t'=t+\varepsilon$. אז $\delta t=\varepsilon$ ונקבל:

$$Q=\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{q}}}\cdot\dot{\mathbf{q}}-\mathcal{L}\right)\frac{\partial\left(\delta t\right)}{\partial\varepsilon}=\sum_{i=1}^{n}p_i\dot q_i-\mathcal{L}\equiv\mathcal{H}$$

זהו ההמילטוניאן, המייצג את האנרגיה הכוללת במערכת; כלומר, קיבלנו את חוק שימור האנרגיה.
שימור תנע: נניח כי הלגרנג'יאן אינווריאנטי להזזה במרחב, $\mathbf{q}\to\mathbf{q}'=\mathbf{q}+\boldsymbol{\varepsilon}$, כאשר $\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ הוא וקטור המכיל את כל n פרמטרי הטרנספורמציה. אז $\delta\mathbf{q}=\boldsymbol{\varepsilon}$ ונקבל:

$$Q_j=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{q}}}\cdot\frac{\partial\left(\delta\mathbf{q}\right)}{\partial\varepsilon_j}=\sum_{i=1}^{n}p_i\frac{\partial\left(\delta q_i\right)}{\partial\varepsilon_j}=\sum_{i=1}^{n}p_i\delta_{ij}=p_j$$

כאשר δ_{ij} היא הדלתא של קרונקר. מכאן, התנע נשמר בכל אחת מהקואורדינטות.

10.3 בדיקת אינווריאנטיות של הלגרנג'יאן

טרנספורמציה במיקום בלבד: יהי הלגרנג'יאן $\mathcal{L}=\frac{1}{2}m\left(\dot x^2+\dot y^2\right)-mgy$ והטרנספורמציה $y\to y'+\varepsilon$. אז $\delta x=\delta\dot x=0$, $\delta y=\varepsilon$ ובנוסף:

$$\delta\dot y=\frac{\mathrm{d}\left(\delta y\right)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}=0$$

כי הפרמטר ε אינו תלוי בזמן. הווריאציה על הלגרנג'יאן היא:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}&=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}\delta x+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot x}\delta\dot x+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}\delta y+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot y}\delta\dot y\\&=-mg\varepsilon\neq0\end{aligned}$$

מכאן, הלגרנג'יאן אינו אינווריאנטי לטרנספורמציה הנתונה ואין גודל נשמר. מצד שני, תהי הטרנספורמציה $x\to x'=x+\varepsilon$. הפעם $\delta y=\delta\dot y=\delta\dot x=0$ ואילו $\delta x=\varepsilon$, ומכאן:

$$\delta\mathcal{L}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}\delta x=0\cdot\varepsilon=0$$

כלומר הלגרנג'יאן אינווריאנטי לטרנספורמציה הזאת. הגודל הנשמר הוא התנע בכיוון x (כפי שראינו קודם).
טרנספורמציה במיקום ובזמן: יהי הלגרנג'יאן $\mathcal{L}=\frac{1}{2}m\dot x^2-\frac{\alpha}{x^2}$ עם הטרנספורמציה $x\to x'=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\varepsilon}x$. מפיתוח בטור טיילור נקבל $x'\approx x+\frac{1}{2}\varepsilon x$ ולכן $\delta x=\frac{1}{2}\varepsilon x$ ו־$\delta\dot x=\frac{1}{2}\varepsilon\dot x$. מכאן:

$$\delta\mathcal{L}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}\delta x+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot x}\delta\dot x=\frac{2\alpha}{x^3}\cdot\frac{1}{2}\varepsilon x+m\dot x\cdot\frac{1}{2}\varepsilon\dot x\neq0$$

והלגרנג'יאן אינו אינווריאנטי. נוסיף את הטרנספורמציה של הזמן $t\to t'=\mathrm{e}^{\varepsilon}t$. אז נקבל $\delta t=\varepsilon t$. נשים לב כי עדיין $\delta x=\frac{1}{2}\varepsilon x$, אך **הנגזרת של x היא עכשיו לפי הזמן החדש, לאחר הטרנספורמציה:**

$$\dot x\to\dot x'=\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}=\frac{\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\varepsilon}x\right)}{\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{\varepsilon}t\right)}=\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\varepsilon}\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{\varepsilon}\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\varepsilon}\dot x$$

ולכן, כדי לקבל את $\delta\dot x$ נפתח שוב בטור טיילור:

$$\dot x\approx\dot x-\frac{1}{2}\varepsilon\dot x\Longrightarrow\delta\dot x=-\frac{1}{2}\varepsilon\dot x$$

בדומה, כאשר בודקים אינווריאנטיות יש להתחשב גם בווריאציה על $\mathrm{d}t$ מפני שהזמן עצמו משתנה, ולכן עלינו לבצע את הווריאציה ישירות על הפעולה במקום על הלגרנג'יאן, כאשר נשתמש בכלל אנלוגי לנגזרת של מכפלה ובהגדרה $\delta\left(\mathrm{d}t\right)=\mathrm{d}\left(\delta t\right)=\varepsilon\,\mathrm{d}t$:

$$\begin{aligned}\delta I&=\delta\left(\int\mathcal{L}\,\mathrm{d}t\right)=\int\mathcal{L}\delta\left(\mathrm{d}t\right)+\int\delta\left(\mathcal{L}\right)\mathrm{d}t\\&=\int\mathcal{L}\varepsilon\,\mathrm{d}t+\int\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}\delta x+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot x}\delta\dot x\right)\mathrm{d}t\\&=\varepsilon\int\mathcal{L}\,\mathrm{d}t+\int\left(\frac{2\alpha}{x^3}\cdot\frac{1}{2}\varepsilon x-m\dot x\cdot\frac{1}{2}\varepsilon\dot x\right)\mathrm{d}t\\&=\varepsilon\int\left(\frac{1}{2}m\dot x^2-\frac{\alpha}{x^2}\right)\mathrm{d}t+\varepsilon\int\left(\frac{\alpha}{x^2}-\frac{1}{2}m\dot x^2\right)\mathrm{d}t\\&=0\end{aligned}$$

כלומר הפעולה היא אינווריאנטית לטרנספורמציות הנתונות (אך רק כאשר הן מופיעות ביחד ועם אותו פרמטר ε). הגודל הנשמר הוא:

$$\begin{aligned}Q&=\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot x}\dot x-\mathcal{L}\right)\frac{\partial\left(\delta t\right)}{\partial\varepsilon}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot x}\frac{\partial\left(\delta x\right)}{\partial\varepsilon}\\&=\left(m\dot x\cdot\dot x-\frac{1}{2}m\dot x^2+\frac{\alpha}{x^2}\right)\frac{\partial\left(\varepsilon t\right)}{\partial\varepsilon}-m\dot x\cdot\frac{\partial\left(\frac{1}{2}\varepsilon x\right)}{\partial\varepsilon}\\&=\left(\frac{1}{2}m\dot x^2+\frac{\alpha}{x^2}\right)t-m\dot x\cdot\frac{1}{2}x=\mathcal{H}t+\frac{1}{2}px\end{aligned}$$

10.4 המקרה $\delta\mathcal{L}\neq0$

אם $\delta\mathcal{L}\neq0$ אבל הווריאציה היא נגזרת שלמה של פונקציה כלשהי:

$$\delta\mathcal{L}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G\left(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t\right)$$

ואין טרנספורמציה על הזמן, אז המטען השמור הוא:

$$Q=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{q}}}\cdot\frac{\partial\left(\delta\mathbf{q}\right)}{\partial\varepsilon}-G=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q_i}\frac{\partial\left(\delta q_i\right)}{\partial\varepsilon}-G$$

בעיה לדוגמה: נתבונן בלגרנג'יאן המתאר את תנועתם של N חלקיקים ב־3 ממדים:

$$\mathcal{L}=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\dot r_i^2-\sum_{i\neq j}V\left(r_{ij}\right)$$

כאשר $r_{ij}\equiv\left\|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j\right\|$, ונפעיל את טרנספורמציית גלילאו $\mathbf{r}_i\to\mathbf{r}_i'=\mathbf{r}_i-\mathbf{v}t$ (מעבר לא־יחסותי למערכת ייחוס הנעה במהירות $\mathbf{v}$ ביחס למערכת המקורית). אז הווריאציה על הלגרנג'יאן היא:

$$\delta\mathcal{L}=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{r}_i}\cdot\delta\mathbf{r}_i+\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{r}}_i}\cdot\delta\dot{\mathbf{r}}_i$$

אבל מכלל השרשרת:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{r}_i}&=-\sum_{i=1}^{N}\sum_{i\neq j}\frac{\partial V\left(r_{ij}\right)}{\partial r_{ij}}\frac{\partial r_{ij}}{\partial\mathbf{r}_i}\\&=-\sum_{i=1}^{N}\sum_{i<j}\frac{\partial V\left(r_{ij}\right)}{\partial r_{ij}}\left(\frac{\partial r_{ij}}{\partial\mathbf{r}_i}+\frac{\partial r_{ji}}{\partial\mathbf{r}_j}\right)\end{aligned}$$

הביטוי בסוגריים מתאפס משיקולי סימטריה ($r_{ij}=r_{ji}$) לכן נוותר עם:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}&=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{r}}_i}\cdot\delta\dot{\mathbf{r}}_i=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{r}}_i}\cdot\frac{\mathrm{d}\left(-\mathbf{v}t\right)}{\mathrm{d}t}\\&=\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\mathbf{r}}_i\cdot\left(-\mathbf{v}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\sum_{i=1}^{N}m_i\mathbf{r}_i\cdot\mathbf{v}\right)\end{aligned}$$

כלומר זהו המקרה המתואר לעיל עם $G=-\sum_{i=1}^{N}m_i\mathbf{r}_i\cdot\mathbf{v}$. המטען השמור הוא:

$$\begin{aligned}Q&=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{r}}_i}\cdot\frac{\partial\left(\delta\mathbf{r}_i\right)}{\partial\varepsilon}-G\\&=-\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\mathbf{r}}_i\cdot\mathbf{v}t+\sum_{i=1}^{N}m_i\mathbf{r}_i\cdot\mathbf{v}\\&=\left(\sum_{i=1}^{N}m_i\mathbf{r}_i-t\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\mathbf{r}}_i\right)\cdot\mathbf{v}\\&=\left(M\mathbf{R}_{\mathrm{cm}}-\mathbf{P}t\right)\cdot\mathbf{v}\end{aligned}$$

כאשר $\mathbf{P}$ הוא התנע הכולל, $\mathbf{R}_{\mathrm{cm}}$ הוא מרכז המסה ו־M היא המסה הכוללת ($\mathbf{P}=M\dot{\mathbf{R}}_{\mathrm{cm}}$).

10.5 שדות

נסמן ב־$x^\mu=\left(ct,\mathbf{x}\right)=\left(ct,x,y,z\right)$ את 4־וקטור המיקום במרחב־זמן. נגדיר וקטור $\boldsymbol{\phi}\left(x^\mu\right)=\left(\phi_1,\ldots,\phi_n\right)$ של שדות, כלומר כל רכיב ϕ_i הוא פונקציה המחזירה מספר מתאים לכל נקודה במרחב־זמן (למשל טמפרטורה). נגדיר את הפעולה:

$$I=\iiiint\mathcal{L}\left(\boldsymbol{\phi},\partial_\mu\boldsymbol{\phi},x^\mu\right)\mathrm{d}^4x$$

נניח כי הפעולה אינווריאנטית תחת הטרנספורמציות:

$$x^\mu\to x^\mu+\delta x^\mu,\qquad\boldsymbol{\phi}\to\boldsymbol{\phi}+\delta\boldsymbol{\phi}$$

כאשר k פרמטרי הטרנספורמציה האינפיניטסימליים הם $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k$. אז קיימים k זרמי נתר:

$$\begin{aligned}j_r^\mu&=\sum_{\sigma=0}^{3}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\boldsymbol{\phi}\right)}\cdot\partial_\sigma\boldsymbol{\phi}-\eta_{\sigma\mu}\mathcal{L}\right)\frac{\partial\left(\delta x^\sigma\right)}{\partial\varepsilon_r}\\&\quad-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\boldsymbol{\phi}\right)}\cdot\frac{\partial\left(\delta\boldsymbol{\phi}\right)}{\partial\varepsilon_r}\end{aligned}$$

כאשר $1\le r\le k$ ו־σ סוכם על כל הקואורדינטות (כלל הסכימה לא עובד כאן מפני שהביטוי מורכב!). בכתיב לא־וקטורי הזרם הוא:

$$\begin{aligned}j_r^\mu&=\sum_{\sigma=0}^{3}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi_i\right)}\partial_\sigma\phi_i-\eta_{\sigma\mu}\mathcal{L}\right)\frac{\partial\left(\delta x^\sigma\right)}{\partial\varepsilon_r}\\&\quad-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi_i\right)}\frac{\partial\left(\delta\phi_i\right)}{\partial\varepsilon_r}\end{aligned}$$

כמו במקרה של מטען נתר הרגיל, גם כאן הביטוי השמאלי רלוונטי רק לטרנספורמציות על המשתנים הבלתי־תלויים והימני לטרנספורמציות על המשתנים התלויים. כל זרם נתר j_r^ν מקיים $\partial_\nu j_r^\nu=0$, ויש לו מטען נתר נשמר מתאים:

$$Q_r=\iiint j_r^0\,\mathrm{d}^3x$$

דוגמה (טרנספורמציה על המשתנים התלויים): נגדיר את הלגרנג'יאן:

$$\mathcal{L}=\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi-m^2\phi^*\phi$$

עבור השדה המרוכב ϕ. במקרה זה ϕ,ϕ^* הן שתי דרגות חופש בלתי־תלויות ($n=2$). נבצע טרנספורמציית סיבוב במישור המרוכב:

$$\begin{aligned}\phi&\to\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon}\phi\approx\phi+\mathrm{i}\varepsilon\phi,&\delta\phi&=\mathrm{i}\varepsilon\phi\\\phi^*&\to\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon}\phi^*\approx\phi-\mathrm{i}\varepsilon\phi,&\delta\phi^*&=-\mathrm{i}\varepsilon\phi^*\end{aligned}$$

(כמובן שהצמוד מסתובב בכיוון ההפוך). אז מתקיים:

$$\delta\left(\partial_\mu\phi\right)=\partial_\mu\left(\delta\phi\right)=\partial_\mu\left(\mathrm{i}\varepsilon\phi\right)=\mathrm{i}\varepsilon\partial_\mu\phi$$

ובדומה $\delta\left(\partial_\mu\phi^*\right)=-\mathrm{i}\varepsilon\partial_\mu\phi^*$. לכן הווריאציה על הלגרנג'יאן היא:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}&=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*}\delta\phi^*\\&\quad+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi\right)}\delta\left(\partial_\mu\phi\right)+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi^*\right)}\delta\left(\partial_\mu\phi^*\right)\\&=-m^2\phi^*\cdot\mathrm{i}\varepsilon\phi+\left(-m^2\phi\right)\cdot\left(-\mathrm{i}\varepsilon\phi^*\right)\\&\quad+\partial^\mu\phi^*\cdot\mathrm{i}\varepsilon\partial_\mu\phi+\partial^\mu\phi\cdot\left(-\mathrm{i}\varepsilon\partial_\mu\phi^*\right)\\&=0\end{aligned}$$

(הערה: $\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi=\partial^\mu\phi^*\partial_\mu\phi$ ולכן יכולנו לגזור לפי $\partial_\mu\phi$ ולצמצם). הווריאציה מתאפסת, ולכן יש זרם נשמר:

$$\begin{aligned}j^\mu&=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi\right)}\frac{\partial\left(\delta\phi\right)}{\partial\varepsilon}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi^*\right)}\frac{\partial\left(\delta\phi^*\right)}{\partial\varepsilon}\\&=\partial^\mu\phi^*\cdot\mathrm{i}\phi+\partial^\mu\phi\left(-\mathrm{i}\phi^*\right)\\&=\mathrm{i}\left(\phi\partial^\mu\phi^*-\phi^*\partial^\mu\phi\right)\end{aligned}$$

מטען נתר המתאים הוא:

$$Q=\iiint j^0\,\mathrm{d}^3x=\mathrm{i}\iiint\left(\phi\dot\phi^*-\phi^*\dot\phi\right)\mathrm{d}^3x$$

דוגמה (טרנספורמציה של המשתנים הבלתי־תלויים): נגדיר את **טרנספורמציית לורנץ** (Lorentz):

$$x^\mu\to\Lambda^\mu_\nu x^\mu=\left(\delta^\mu_\nu+\varepsilon^\mu_\nu\right)x^\nu=x^\mu+\varepsilon^\mu_\nu x^\nu$$

אז $\delta x^\mu=\varepsilon^\mu_\nu x^\nu$. כתוצאה מהטרנספורמציה על הקואורדינטות, השדה ϕ עובר גם הוא טרנספורמציה:

$$\delta\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}\delta x^\mu=\varepsilon^\mu_\nu x^\nu\partial_\mu\phi$$

במקרה זה יוצר הטרנספורמציה, ε^μ_ν, הוא טנזור מסדר 2 ולכן המטען הנשמר יהיה גם הוא טנזור מסדר 2, והזרם יהיה טנזור מסדר 3! אפשר להסביר זאת גם כך שיש בעצם 16 פרמטרי טרנספורמציה (כי ε^μ_ν מוגדר לכל $0\le\nu,\mu\le3$) ולכן יהיו 16 זרמי נתר (שהם וקטורים 4־ממדיים) שמאוחדים כולם בתוך טנזור 4×4 אחד. האינדקס r במרשם למעלה יהפוך לאינדקס כפול $\mu\nu$ ונחליף את האינדקס של הזרם עצמו ב־ρ:

$$\begin{aligned}j_\nu^{\mu\rho}&=\sum_{\sigma=0}^{3}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\rho\phi\right)}\partial_\sigma\phi-\eta_{\sigma\rho}\mathcal{L}\right)\frac{\partial\left(\delta x^\sigma\right)}{\partial\varepsilon^\mu_\nu}\\&=\sum_{\sigma=0}^{3}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\rho\phi\right)}\partial_\sigma\phi-\eta_{\sigma\rho}\mathcal{L}\right)\delta^\sigma_\mu x^\nu\\&=\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\rho\phi\right)}\partial_\mu\phi-\eta_{\mu\rho}\mathcal{L}\right)x^\nu\end{aligned}$$

כאן השתמשנו ב:

$$\frac{\partial\left(\delta x^{\sigma}\right)}{\partial\varepsilon_{\nu}^{\mu}}=\frac{\partial\left(\varepsilon_{\lambda}^{\sigma}x^{\lambda}\right)}{\partial\varepsilon_{\nu}^{\mu}}=\delta_{\nu}^{\lambda}\delta_{\mu}^{\sigma}x^{\lambda}=\delta_{\mu}^{\sigma}x^{\nu}$$

קיבלנו **טנזור של זרמי נתר** j^{ρ} המאופיינים באינדקסים ν,μ. לכל זרם נתר כזה יש מטען נתר מתאים:

$$Q_{\nu}^{\mu}=\iiint j_{\nu}^{\mu 0}\,\mathrm{d}^{3}x$$

הערה: באופן כללי טרנספורמציית לורנץ מקיימת:

$$\eta_{\mu\nu}=\eta_{\sigma\rho}\Lambda_{\mu}^{\sigma}\Lambda_{\nu}^{\rho},\qquad \eta=\Lambda^{T}\cdot\eta\cdot\Lambda$$

$$\det\Lambda=\pm 1,\qquad \Lambda_{0}^{0}=\pm\sqrt{1+\sum_{i=1}^{3}\left(\Lambda_{0}^{i}\right)^{2}}$$

10.6 טנזור אנרגיה־תנע

נגדיר הזזה בזמן־מרחב: $x^{\mu}\rightarrow x^{\mu}+\varepsilon^{\mu}$, כך ש־$\delta x^{\mu}=\varepsilon^{\mu}$. במקרה זה $k=4$ (יש זרם מתאים לכל קואורדינטה). מתקיים:

$$\frac{\partial\left(\delta x^{\sigma}\right)}{\partial\varepsilon_{\nu}}=\frac{\partial\left(\varepsilon^{\sigma}\right)}{\partial\varepsilon_{\nu}}=\delta_{\nu}^{\sigma}$$

ולכן זרם נתר הוא:

$$\begin{aligned}j_{\nu}^{\mu} &= \sum_{\sigma=0}^{3}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{\mu}\phi\right)}\partial_{\sigma}\phi-\eta_{\sigma\mu}\mathcal{L}\right)\delta_{\nu}^{\sigma}\\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{\mu}\phi\right)}\partial_{\nu}\phi-\eta_{\nu\mu}\mathcal{L}\end{aligned}$$

זהו טנזור האנרגיה־תנע, והשימור שלו מקביל לשימור אנרגיה ותנע המוכר. ניתן לבצע הורדת אינדקסים על μ ולקבל:

$$T_{\mu\nu}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{\mu}\phi\right)}\partial_{\nu}\phi-\eta_{\mu\nu}\mathcal{L}$$

האיבר T_{00} נקרא צפיפות האנרגיה. **דוגמה:** יהי הלגרנג'יאן $\mathcal{L}=\frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi-V\left(\phi\right)$ כאשר ϕ ממשי. אז:

$$T_{\mu\nu}=\partial_{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi-\eta_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\partial_{\lambda}\phi\partial^{\lambda}\phi-V\left(\phi\right)\right)$$

$$\begin{aligned}T_{00} &= \partial_{0}\phi\partial_{0}\phi-\eta_{00}\left(\frac{1}{2}\partial_{\lambda}\phi\partial^{\lambda}\phi-V\left(\phi\right)\right)\\ &= \dot{\phi}^{2}-\frac{1}{2}\left(\dot{\phi}^{2}-\left(\boldsymbol{\nabla}\phi\right)^{2}\right)+V\left(\phi\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\dot{\phi}^{2}+\left(\boldsymbol{\nabla}\phi\right)^{2}\right)+V\left(\phi\right)\end{aligned}$$

כאן ראינו כלל חשוב מאוד: בלגרנג'יאן יש שימוש בכלל הסכימה עם האינדקס μ, ולכן כאשר שיבצנו אותו בטנזור שאחד מהאינדקסים שלו הוא μ היינו חייבים להחליף את אינדקס הסכימה μ באינדקס אחר λ, אחרת ה־μ לא היה אינדקס חופשי וכלל הסכימה לא היה פועל עליו.

חלק IV
נוסחאות כלליות

11 חשבון טנזורים

11.1 הגדרות בסיסיות

בכל הנוסחאות שלהלן יעשה שימוש **בכלל הסכימה של איינשטיין** (Einstein Summation Convention): כל אינדקס חופשי (המסומן באות שרירותית כלשהי) שמופיע יותר מפעם אחת במכפלה של מספר ביטויים מצביע על כך שיש לסכום את המכפלה על כל הערכים האפשריים של האינדקס. לדוגמה:

$$A_{\mu}B^{\mu}=\sum_{\mu=0}^{3}A_{\mu}B^{\mu}$$

חשוב לשים לב כי למשל המשוואה $C_{\mu}=A_{\mu}B^{\mu}$ היא מערכת של ארבע משוואות, אחת לכל ערך אפשרי של האינדקס μ, ולכן האינדקס אינו חופשי וכלל הסכימה אינו תקף!
מסמנים וקטור **קונטרה־וריאנטי** באינדקס עליון **וקו־וריאנטי** באינדקס תחתון. טנזורים קונטרה־וריאנטיים, קו־וריאנטיים או מעורבים הם בעלי יותר מאינדקס אחד, כאשר כל אינדקס מתנהג בצורה קונטרה־וריאנטית או קו־וריאנטית בהתאם למיקומו, למעלה או למטה.
טנזור סימטרי מקיים $F_{\mu\nu}=F_{\nu\mu}$ והוא אנלוגי למטריצה סימטרית. יש לו 10 דרגות חופש (האלכסון וכל מה שמעליו). טנזור אנטי־סימטרי מקיים $F_{\mu\nu}=-F_{\nu\mu}$ ויש לו 6 דרגות חופש (הפעם האלכסון חייב להתאפס). **המטריקה** שתשמש אותנו היא:

$$\eta_{\mu\nu}=\eta^{\mu\nu}=\left(\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{array}\right)$$

קל לראות כי היא מקיימת $\eta_{\mu\nu}=\eta_{\nu\mu}$ (סימטריה) ו־$\eta_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu}=\delta_{\nu}^{\mu}$. המטריקה משמשת ל"העלאה" או "הורדה" של אינדקסים:

$$A_{\mu}=\eta_{\mu\nu}A^{\nu},\qquad A^{\mu}=\eta^{\mu\nu}A_{\nu}$$
$$F_{\mu\nu}=\eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}F^{\sigma\rho}$$

מכפלה סקלרית של שני וקטורים מוגדרת כך:

$$A_{\mu}B^{\mu}=A_{0}B_{0}-A_{i}B^{i}$$

(מקובל שכאשר האינדקס הוא אות יוונית הוא מקבל את הערכים $0,1,2,3$ וכאשר הוא אות אנגלית הוא מקבל את הערכים $1,2,3$). ניתן לכפול סקלרית גם שני טנזורים: המכפלה $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ היא סכום כל האיברים במטריצה בריבוע. וקטור הקואורדינטות מוגדר כך:

$$x^{\mu}=\left(ct,\mathbf{x}\right)=\left(ct,x,y,z\right)$$
$$x_{\mu}=\left(ct,-\mathbf{x}\right)=\left(ct,-x,-y,-z\right)$$

נגזרות במרחב־זמן מוגדרות כך:

$$\partial_{\mu}=\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}=\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t},\boldsymbol{\nabla}\right),\qquad \partial^{\mu}=\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}=\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t},-\boldsymbol{\nabla}\right)$$

(כמעט תמיד נעדיף לעבוד ביחידות בהן $c=1$) ומתקיים:

$$\partial_{\mu}x^{\nu}=\delta_{\mu}^{\nu},\qquad \partial^{\mu}x_{\nu}=\delta_{\nu}^{\mu}$$
$$\partial_{\mu}x_{\nu}=\partial_{\mu}\left(\eta_{\sigma\nu}x^{\sigma}\right)=\eta_{\sigma\nu}\partial_{\mu}x^{\sigma}=\eta_{\sigma\nu}\delta_{\mu}^{\sigma}=\eta_{\mu\nu}$$
$$\partial_{\mu}\partial^{\mu}\phi=\frac{1}{c^{2}}\ddot{\phi}-\nabla^{2}\phi,\qquad \partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi=\frac{1}{c^{2}}\dot{\phi}^{2}-\left(\boldsymbol{\nabla}\phi\right)^{2}$$

כאשר δ_{μ}^{ν} היא **הדלתא של קרונקר** (Kronecker Delta). הדלתא משמשת להחלפת שמות האינדקסים, למשל $\eta_{\sigma\nu}\delta_{\mu}^{\sigma}=\eta_{\mu\nu}$ כי כל המחוברים בסכום מתאפסים למעט זה שבו $\sigma=\mu$. סימון חשוב נוסף הוא **סימן הפרמוטציה** (Permutation Symbol) או סימן לוי־צ'יוויטה (Levi-Civita) ε_{ijk} המקבל את הערך 0 כאשר שניים מהאינדקסים שווים (לדוגמה $i=j$), $+1$ אם שלושת האינדקסים הם פרמוטציה זוגית של 123 (כלומר, שלושת מספרים שאפשר להגיע אליה מ־123 באמצעות מספר זוגי של החלפות סדר, לדוגמה: $312\rightarrow 132\rightarrow 123$, לכן 312 היא פרמוטציה זוגית) ו־-1 אם שלושת האינדקסים הם פרמוטציה אי־זוגית של 123. זהויות מעניינות הן:

$$\delta_{ij}\varepsilon_{ijk}=0,\qquad \varepsilon_{ipq}\varepsilon^{jpq}=2\delta_{i}^{j},\qquad \varepsilon_{ijk}\varepsilon^{pqk}=\delta_{i}^{p}\delta_{j}^{q}-\delta_{i}^{q}\delta_{j}^{p}$$
$$\left(\mathbf{A}\times\mathbf{B}\right)_{i}=\varepsilon_{ijk}A_{j}B_{k},\qquad \left(\boldsymbol{\nabla}\times A\right)_{i}=\varepsilon_{ijk}\partial^{j}F_{k}$$
$$\mathbf{A}\cdot\left(\mathbf{B}\times\mathbf{C}\right)=\varepsilon_{ijk}A_{i}B_{j}C_{k}$$

12 אינטגרלים

אם $\operatorname{Re}a>0$, $x_{0}\in\mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-a\left(x-x_{0}\right)^{2}}\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-ax^{2}+bx}\mathrm{d}x=\exp\left(\frac{b^{2}}{4a}\right)\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

אם $\operatorname{Re}a>-1,\operatorname{Re}b>0,c>0$ אז:

$$\int_{0}^{\infty}x^{a}\mathrm{e}^{-bx^{c}}\mathrm{d}x=\frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{c}\right)}{b^{\frac{a+1}{c}}c}$$

אם m זוגי, n שלם ו־$\operatorname{Re}a>0$ אז:

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^{n}\mathrm{e}^{-ax^{m}}\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{2\Gamma\left(\frac{n+1}{m}\right)}{a^{\frac{n+1}{m}}m} & n\text{ even}\\ 0 & n\text{ odd}\end{cases}$$

13 טורי פורייה

$$\int_{0}^{2\pi}\left\{\begin{array}{c}\cos\left(mx\right)\sin\left(nx\right)\\ \sin\left(mx\right)\sin\left(nx\right)\\ \cos\left(mx\right)\cos\left(nx\right)\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\end{array}\right\}\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{c}0\\ \pi\delta_{mn}\\ \pi\delta_{mn}\\ 2\pi\delta_{mn}\end{array}\right\}$$

$$f\left(x\right)=\frac{1}{2}a_{0}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n}\cos\left(nx\right)+\sum_{n=1}^{\infty}b_{n}\sin\left(nx\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$$

$$\left\{\begin{array}{c}a_{n}\\ b_{n}\end{array}\right\}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f\left(x\right)\left\{\begin{array}{c}\cos\left(nx\right)\\ \sin\left(nx\right)\end{array}\right\}\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{c}c_{n}+c_{-n}\\ \mathrm{i}\left(c_{n}-c_{-n}\right)\end{array}\right\}$$

$$c_{n}=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}f\left(x\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(a_{n}+\mathrm{i}b_{n}\right) & n<0\\ \frac{1}{2}\left(a_{n}-\mathrm{i}b_{n}\right) & n\geq 0\end{cases}$$

14 אנליזה וקטורית

14.1 פעולות וזהויות בסיסיות

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})=\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$$
$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B}-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}=\left|\begin{array}{ccc}\hat{\mathbf{x}}&\hat{\mathbf{y}}&\hat{\mathbf{z}}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ A_{x}&A_{y}&A_{z}\end{array}\right|=$$
$$\left(\frac{\partial A_{z}}{\partial y}-\frac{\partial A_{y}}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}}+\left(\frac{\partial A_{x}}{\partial z}-\frac{\partial A_{z}}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{y}}+\left(\frac{\partial A_{y}}{\partial x}-\frac{\partial A_{x}}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{z}}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})=0,\ \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}f)=\mathbf{0},\ \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}f)=\nabla^{2}f$$
$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})=\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A})-\nabla^{2}\mathbf{A}$$
$$\nabla^{2}\mathbf{A}=(\nabla^{2}A_{x})\hat{\mathbf{x}}+(\nabla^{2}A_{y})\hat{\mathbf{y}}+(\nabla^{2}A_{z})\hat{\mathbf{z}}$$

14.2 חוקי מכפלה ומנה

$$\boldsymbol{\nabla}(fg)=f(\boldsymbol{\nabla}g)+g(\boldsymbol{\nabla}f)$$
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(f\mathbf{A})=f(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A})+\mathbf{A}\cdot(\boldsymbol{\nabla}f)$$
$$\boldsymbol{\nabla}\times(f\mathbf{A})=f(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})-\mathbf{A}\times(\boldsymbol{\nabla}f)$$
$$\nabla^{2}(fg)=(\nabla^{2}f)g+2(\boldsymbol{\nabla}f)\cdot(\boldsymbol{\nabla}g)+f(\nabla^{2}g)$$
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{B}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})-\mathbf{A}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B})$$

$$\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=\mathbf{A}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B})+\mathbf{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})+(\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{B}+(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{A}$$
$$\boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{A}-(\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{B}+\mathbf{A}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B})-\mathbf{B}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A})$$

$$\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\boldsymbol{\nabla}f-f\boldsymbol{\nabla}g}{g^{2}}$$
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{\mathbf{A}}{g}\right)=\frac{g(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A})-\mathbf{A}\cdot(\boldsymbol{\nabla}g)}{g^{2}}$$
$$\boldsymbol{\nabla}\times\left(\frac{\mathbf{A}}{g}\right)=\frac{g(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})+\mathbf{A}\times(\boldsymbol{\nabla}g)}{g^{2}}$$

14.3 נגזרות מיוחדות

$$\boldsymbol{\nabla}r=\hat{\mathbf{r}},\qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{r}=3,\qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{r}=0$$
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^{2}}=4\pi\delta^{3}(\mathbf{r}),\qquad \boldsymbol{\nabla}\left[f\left(r\right)\right]=f'\left(r\right)\hat{\mathbf{r}}$$
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\left[f\left(r\right)\mathbf{r}\right]=3f\left(r\right)+f'\left(r\right)r,\ \boldsymbol{\nabla}\times\left[f\left(r\right)\mathbf{r}\right]=0$$

14.4 משפט הגרדיאנט, גאוס וסטוקס

$$\int_{\mathbf{a}\rightarrow\mathbf{b}}(\boldsymbol{\nabla}f)\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}=f(\mathbf{b})-f(\mathbf{a})$$
$$\iiint_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A})\mathrm{d}V=\oiint_{\partial\mathcal{V}}\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a}\qquad \iint_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})\cdot\mathrm{d}\mathbf{a}=\oint_{\partial\mathcal{S}}\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}$$

14.5 קואורדינטות גליליות

$$x=\rho\cos\phi,\quad y=\rho\sin\phi,\quad z=z$$
$$\hat{\mathbf{x}}=\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\rho}}-\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}},\quad \hat{\mathbf{y}}=\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\rho}}+\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}},\quad \hat{\mathbf{z}}=\hat{\mathbf{z}}$$

$$\begin{cases}\rho=\sqrt{x^{2}+y^{2}}\text{ (distance from z axis)}\\ \phi=\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)\in[0,2\pi]\\ z=z\end{cases}$$
$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{\rho}}=\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}}+\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}}=\dfrac{1}{\rho}\left(x\,\hat{\mathbf{x}}+y\,\hat{\mathbf{y}}\right)\\ \hat{\boldsymbol{\phi}}=-\sin\phi\,\hat{\mathbf{x}}+\cos\phi\,\hat{\mathbf{y}}=\dfrac{1}{\rho}\left(-y\,\hat{\mathbf{x}}+x\,\hat{\mathbf{y}}\right)\\ \hat{\mathbf{z}}=\hat{\mathbf{z}}\end{cases}$$

$$\mathrm{d}V=\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z,\qquad \mathrm{d}\mathbf{l}=\mathrm{d}\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}}+\rho\,\mathrm{d}\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}+\mathrm{d}z\,\hat{\mathbf{z}}$$
$$T\text{ (Kinetic Energy)}=\frac{1}{2}m\left[\dot{\rho}^{2}+\left(\rho\dot{\phi}\right)^{2}+\dot{z}^{2}\right]$$
$$\mathrm{d}\mathbf{a}=\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z\,\hat{\boldsymbol{\rho}}+\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z\,\hat{\boldsymbol{\phi}}+\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\hat{\mathbf{z}}$$

$$\boldsymbol{\nabla}f=\frac{\partial f}{\partial\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_{\rho})+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_{\phi}}{\partial\phi}+\frac{\partial A_{z}}{\partial z}$$
$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}=\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_{z}}{\partial\phi}-\frac{\partial A_{\phi}}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{\rho}}+\left(\frac{\partial A_{\rho}}{\partial z}-\frac{\partial A_{z}}{\partial\rho}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}+$$
$$+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_{\phi})-\frac{\partial A_{\rho}}{\partial\phi}\right)\hat{\mathbf{z}}$$
$$\nabla^{2}f=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^{2}}\frac{\partial^{2}f}{\partial\phi^{2}}+\frac{\partial^{2}f}{\partial z^{2}}$$

14.6 קואורדינטות כדוריות

$$x=r\sin\theta\cos\phi,\qquad y=r\sin\theta\sin\phi,\qquad z=r\cos\theta$$
$$\begin{cases}\hat{\mathbf{x}}=\sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{r}}+\cos\theta\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\theta}}-\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}\\ \hat{\mathbf{y}}=\sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{r}}+\cos\theta\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\theta}}+\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}\\ \hat{\mathbf{z}}=\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}}-\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\end{cases}$$

$$\begin{cases}r=\sqrt{x^{2}+y^{2}+z^{2}}\text{ (distance from origin)}\\ \theta=\cos^{-1}\left(\dfrac{z}{r}\right)\in[0,\pi]\text{ (angle down from z axis)}\\ \phi=\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)\in[0,2\pi]\text{ (angle from x axis)}\end{cases}$$
$$\begin{cases}\hat{\mathbf{r}}=\sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}}+\sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}}+\cos\theta\,\hat{\mathbf{z}}\\ \hat{\boldsymbol{\theta}}=\cos\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}}+\cos\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}}-\sin\theta\,\hat{\mathbf{z}}\\ \hat{\boldsymbol{\phi}}=-\sin\phi\,\hat{\mathbf{x}}+\cos\phi\,\hat{\mathbf{y}}\end{cases}$$

$$\mathrm{d}V=r^{2}\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$
$$\mathrm{d}\mathbf{l}=\mathrm{d}r\,\hat{\mathbf{r}}+r\,\mathrm{d}\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}+r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$$
$$T\text{ (Kinetic Energy)}=\frac{1}{2}m\left[\dot{r}^{2}+\left(r\dot{\theta}\right)^{2}+\left(r\sin\theta\,\dot{\phi}\right)^{2}\right]$$
$$\mathrm{d}\mathbf{a}=r^{2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\hat{\mathbf{r}}+r\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\hat{\boldsymbol{\theta}}+r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\boldsymbol{\nabla}f=\frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}=\frac{1}{r^{2}}\frac{\partial}{\partial r}(r^{2}A_{r})+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_{\theta})+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}A_{\phi}$$
$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}=\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_{\phi})-\frac{\partial A_{\theta}}{\partial\phi}\right)\hat{\mathbf{r}}+$$
$$+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_{r}}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial r}(rA_{\phi})\right)\hat{\boldsymbol{\theta}}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_{\theta})-\frac{\partial A_{r}}{\partial\theta}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}$$
$$\nabla^{2}f=\underbrace{\frac{1}{r^{2}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{2}\frac{\partial f}{\partial r}\right)}_{\text{or }\frac{1}{r}\frac{\partial^{2}}{\partial r^{2}}(rf)}+\frac{1}{r^{2}\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+$$
$$+\frac{1}{r^{2}\sin^{2}\theta}\frac{\partial^{2}f}{\partial\phi^{2}}$$