שיטות בפיזיקה עיונית 2: פתרון מבחן מועד א' תש"ע ($24/6/2010$)

גרסה 1.0, ספטמבר 2010

ברק שושני
baraksh@gmail.com | http://baraksh.co.il/

חלק I
שאלות אמריקאיות

שאלה 1

חשבו את הגודל:

$$\langle n|Ax+Bp|m\rangle$$

(הערה: הייתה טעות בהגדרות שניתנו בשאלה)

תשובה

ידוע כי:

$$x=\sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}}\left(a+a^\dagger\right),\qquad p=-\mathrm{i}\sqrt{\frac{M\omega\hbar}{2}}\left(a-a^\dagger\right)$$

כאשר אופרטורי היצירה $a^\dagger$ וההשמדה a מוגדרים כך:

$$a^\dagger|m\rangle=\sqrt{m+1}\,|m+1\rangle,\qquad a|m\rangle=\sqrt{m}\,|m-1\rangle$$

מכאן:

$$\begin{aligned}
\langle n|Ax+Bp|m\rangle &= \left\langle n\middle|A\sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}}\left(a+a^\dagger\right)-\mathrm{i}\,B\sqrt{\frac{M\omega\hbar}{2}}\left(a-a^\dagger\right)\middle|m\right\rangle\\
&=\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\left\langle n\middle|\frac{A}{\sqrt{M\omega}}\left(a+a^\dagger\right)-\mathrm{i}\,B\sqrt{M\omega}\left(a-a^\dagger\right)\middle|m\right\rangle\\
&=\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\left\langle n\middle|\left(\frac{A}{\sqrt{M\omega}}-\mathrm{i}\,B\sqrt{M\omega}\right)a+\left(\frac{A}{\sqrt{M\omega}}+\mathrm{i}\,B\sqrt{M\omega}\right)a^\dagger\middle|m\right\rangle\\
&=\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\left[\left(\frac{A}{\sqrt{M\omega}}-\mathrm{i}\,B\sqrt{M\omega}\right)\langle n|a|m\rangle+\left(\frac{A}{\sqrt{M\omega}}+\mathrm{i}\,B\sqrt{M\omega}\right)\langle n|a^\dagger|m\rangle\right]\\
&=\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\left[\left(\frac{A}{\sqrt{M\omega}}-\mathrm{i}\,B\sqrt{M\omega}\right)\sqrt{m}\,\langle n|m-1\rangle+\left(\frac{A}{\sqrt{M\omega}}+\mathrm{i}\,B\sqrt{M\omega}\right)\sqrt{m+1}\,\langle n|m+1\rangle\right]\\
&=\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\left[\left(\frac{A}{\sqrt{M\omega}}-\mathrm{i}\,B\sqrt{M\omega}\right)\sqrt{m}\delta_{n,m-1}+\left(\frac{A}{\sqrt{M\omega}}+\mathrm{i}\,B\sqrt{M\omega}\right)\sqrt{m+1}\delta_{n,m+1}\right]\\
&=\left(A\sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}}-\mathrm{i}\,B\sqrt{\frac{M\omega\hbar}{2}}\right)\sqrt{m}\delta_{n,m-1}+\left(A\sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}}+\mathrm{i}\,B\sqrt{\frac{M\omega\hbar}{2}}\right)\sqrt{m+1}\delta_{n,m+1}\\
&=\left(A\sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}}-\mathrm{i}\,B\sqrt{\frac{M\omega\hbar}{2}}\right)\sqrt{m}\delta_{n,m-1}+\left(A\sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}}+\mathrm{i}\,B\sqrt{\frac{M\omega\hbar}{2}}\right)\sqrt{n}\delta_{n,m+1}
\end{aligned}$$

לכן, התשובה הנכונה היא ב'.

שאלה 2

חשבו את האינטגרל:

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^4}\,\mathrm{d}x$$

תשובה

הדרך הפשוטה ביותר לפתור את האינטגרל היא להשתמש בנוסחה הבאה מתוך דף הנוסחאות:

$$\int_0^\infty x^a\,\mathrm{e}^{-bx^c}\,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{c}\right)}{b^{\frac{a+1}{c}}c}$$

נציב $a=0, b=1, c=4$ ונקבל:

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$$

ביטוי זו אינו מופיע באף אחת מהתשובות הנתונות. אך נזכור את ההגדרה:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) + z!$$

ומכאן:

$$\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)!$$

לכן, התשובה הנכונה היא א'.

שאלה 3

נתונה הפונקציה היוצרת:

$$\frac{1}{\left(1-2xt+t^2\right)^\alpha} = g(x,t) = \sum C_n t^n$$

נמצא את יחס הרקורסיה שמקיימות הפונקציות C_n.

תשובה

ראשית נפתור בשיטת האלימינציה. נשים לב כי עבור $\alpha = 1$ נקבל את פולינומי צ'בישב מהסוג השני U_n. פולינומים אלה מקיימים את יחס הנסיגה:

$$U_{n+1} + U_{n-1} = 2xU_n$$

תשובה א' היא:

$$nC_{n+1} + (n-2)\,C_{n-1} = 2xC_n$$

עבור $n=1$, למשל, מתקיים עבור פולינומי צ'בישב:

$$U_2 - 2xU_1 = -U_0$$

אבל מתשובה א':

$$C_2 - 2xC_1 = C_0$$

אם $U_n = C_n$, לא ייתכן ששני יחסי הנסיגה יתקיימו, כי אז בהכרח $U_0 = 0$, אך אנו יודעים כי $U_0 = 1$. לכן תשובה א' נפסלת. תשובה ב' היא:

$$(n+1)\,\alpha C_{n+1} + (n-1)\,C_{n-1} = x\,(n+\alpha-1)\,C_n$$

נציב $\alpha = 1$ ונקבל:

$$(n+1)\,C_{n+1} + (n-1)\,C_{n-1} = xnC_n$$

עבור $n = 1$ נקבל:

$$2C_2 = xC_1 \Longrightarrow C_2\,(x) = \frac{1}{2}xC_1\,(x)$$

אך אנו יודעים כי עבור פולינומי צ'בישב:

$$U_2\,(x) = 4x^2 - 1, \qquad \frac{1}{2}xU_1\,(x) = \frac{1}{2}x \cdot 2x = x^2$$

ושוב קיבלנו סתירה. לכן תשובה ב' נפסלת. תשובה ד' היא:

$$nC_{n+1} + (1+2\alpha)\,C_{n-1} = (n+\alpha)\,C_n$$

נציב $\alpha = 1$ ונקבל:

$$nC_{n+1} + 3C_{n-1} = (n+1)\,C_n$$

עבור $n = 1$ נקבל:

$$C_2 + 3C_0 = 2C_1 \Longrightarrow C_2 - 2C_1 = -3C_0$$

נזכור כי עבור פולינומי צ'בישב מתקיים:

$$U_2 - 2xU_1 = -U_0$$

עבור $x = 1$, אם $U_n = C_n$ ושני יחסי הרקורסיה מתקיימים נקבל בהכרח $U_0 = 0$ ושוב קיבלנו סתירה. לכן התשובה הנכונה חייבת להיות תשובה ג'. בכל זאת נבדוק שהיא לא יוצרת סתירה, כדי להיות בטוחים שלא טעינו בחישובים לעיל ושאין טעות במבחן עצמו. התשובה היא:

$$(n+1)\,C_{n+1} + (n-1+2\alpha)\,C_{n-1} = 2x\,(n+\alpha)\,C_n$$

נציב $\alpha = 1$ ונקבל:

$$(n+1)\,C_{n+1} + (n+1)\,C_{n-1} = 2x\,(n+1)\,C_n$$

נחלק ב־$n+1$ (זה אפשרי כי $n \geq 0$):

$$C_{n+1} + C_{n-1} = 2xC_n$$

וקיבלנו בדיוק את יחס הנסיגה הידוע של פולינומי צ'בישב. זה כמובן לא מספיק להוכיח שיחס הנסיגה מתקיים **לכל** α, אך במקרה שלנו זה מספיק כדי להיות בטוחים שתשובה ג' היא הנכונה.

כעת נפתור את השאלה ישירות. מהנתון:

$$\left(1 - 2xt + t^2\right)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\,(x)\,t^n$$

נגזור את שני האגפים לפי t ונקבל:

$$\begin{aligned}
&-\alpha\left(1-2xt+t^2\right)^{-\alpha-1}(-2x+2t)=\sum_{n=1}^{\infty}nC_n(x)\,t^{n-1}\\
\Rightarrow&2\alpha(x-t)\left(1-2xt+t^2\right)^{-\alpha-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,C_{n+1}(x)\,t^n\\
\Rightarrow&2\alpha(x-t)\left(1-2xt+t^2\right)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x)\,t^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,C_{n+1}(x)\,t^n\\
\Rightarrow&2\alpha(x-t)\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x)\,t^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(1-2xt+t^2\right)C_{n+1}(x)\,t^n\\
\Rightarrow&2\alpha\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x)\left(xt^n-t^{n+1}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(t^n-2xt^{n+1}+t^{n+2}\right)C_{n+1}(x)\\
\Rightarrow&2\alpha\sum_{n=0}^{\infty}xC_n(x)\,t^n-2\alpha\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x)\,t^{n+1}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,C_{n+1}(x)\,t^n-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,2xC_{n+1}(x)\,t^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,C_{n+1}(x)\,t^{n+2}\\
\Rightarrow&2\alpha\sum_{n=0}^{\infty}xC_n(x)\,t^n-2\alpha\sum_{n=1}^{\infty}C_{n-1}(x)\,t^n\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,C_{n+1}(x)\,t^n-\sum_{n=1}^{\infty}2nxC_n(x)\,t^n+\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\,C_{n-1}(x)\,t^n\\
\Rightarrow&2\alpha\sum_{n=0}^{\infty}xC_n(x)\,t^n-2\alpha\sum_{n=1}^{\infty}C_{n-1}(x)\,t^n-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,C_{n+1}(x)\,t^n+\sum_{n=0}^{\infty}2nxC_n(x)\,t^n-\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\,C_{n-1}(x)\,t^n=0\\
\Rightarrow&\left[2\alpha xC_0(x)-C_1(x)\right]t^0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[2\alpha xC_n(x)-2\alpha C_{n-1}(x)-(n+1)\,C_{n+1}(x)+2nxC_n(x)-(n-1)\,C_{n-1}(x)\right]t^n=0\\
\Rightarrow&\left[2\alpha xC_0(x)-C_1(x)\right]t^0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[2x(n+\alpha)\,C_n(x)-(n-1+2\alpha)\,C_{n-1}(x)-(n+1)\,C_{n+1}(x)\right]t^n=0
\end{aligned}$$

ייצוג פונקציה באמצעות טור חזקות הוא יחיד, מכאן כל המקדמים מתאפסים ונקבל עבור $n>0$:

$$(n+1)\,C_{n+1}(x)+(n-1+2\alpha)\,C_{n-1}(x)=2x(n+\alpha)\,C_n(x)$$

לכן, התשובה הנכונה היא ג'.

שאלה 3

נתונה צפיפות הלגרנג'יאן בשני מימדים:

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi+\frac{m^2}{\beta}\left[\cosh(\beta\phi)-1\right]$$

מצאו את משוואות התנועה ואת הסימטריה במערכת.

תשובה

משוואת אוילר־לגרנג' עבור שדות היא:

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}$$

נציב את $\mathcal{L}$ ונקבל:

$$\begin{aligned}
&\partial_\mu\left(\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\right)=\frac{m^2}{\beta}\cdot\beta\sinh(\beta\phi)\\
\Rightarrow&\frac{1}{2}\partial_\mu\partial^\mu\phi-m^2\sinh(\beta\phi)=0
\end{aligned}$$

נשים לב כי תשובות א' וג' נפסלות. נציב את הסימטריה מתשובה ב', $\phi \to \phi + \frac{2\pi n}{\beta}$:

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}\partial_\mu \left(\phi + \frac{2\pi n}{\beta}\right) \partial^\mu \left(\phi + \frac{2\pi n}{\beta}\right) + \frac{m^2}{\beta}\left[\cosh\left(\beta\phi + 2\pi n\right) - 1\right] \neq \mathcal{L}$$

אם הקוסינוס היה רגיל ולא היפרבולי, היינו מקבלים כאן סימטריה, אך זה לא המקרה. לכן גם תשובה ב' נפסלת. ליתר בטחון נבדוק שהסימטריה מתשובה ד', $\phi \to -\phi$, באמת מתקיימת. ואכן:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= \frac{1}{2}\partial_\mu \left(-\phi\right) \partial^\mu \left(-\phi\right) + \frac{m^2}{\beta}\left[\cosh\left(-\beta\phi\right) - 1\right] \\ &= \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{m^2}{\beta}\left[\cosh\left(\beta\phi\right) - 1\right] \\ &= \mathcal{L}\end{aligned}$$

כי cosh פונקציה זוגית. מכאן, התשובה הנכונה היא ד'.

שאלה 5

הפעולה (לא הלגרנג'יאן - זו טעות) של חלקיק יחסותי בקואורדינטות ספריות היא:

$$\mathcal{S} = mc \int \sqrt{\dot{x}_0^2 - \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2\right)}\mathrm{d}\tau$$

חשבו את המטען הקשור להזזות ב־x_0 ואת המטען הקשור להזזות ב־ϕ.

תשובה

הלגרנג'יאן הוא:

$$\mathcal{L}\left(\tau, r, \theta, \phi, x_0, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{x}_0\right) = mc\sqrt{\dot{x}_0^2 - \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2\right)}$$

המשתנה הבלתי־תלוי הוא הזמן העצמי τ של החלקיק. המשתנים התלויים הם הקואורדינטות הספריות r, θ, ϕ ונגזרותיהן לפי הזמן העצמי $\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$ (הלגרנג'יאן אינו תלוי בקואורדינטה ϕ, אך כן בנגזרתה $\dot{\phi}$), והקואורדינטה x_0 ונגזרתה $\dot{x}_0$.

הזזה ב־x_0 (המיקום ההתחלתי בציר x?) אינה משנה את הנגזרת $\dot{x}_0$ ולכן הלגרנג'יאן אינווריאנטי להזזה זו. מטען נתר הוא:

$$Q = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_0} = \frac{mc\dot{x}_0}{\sqrt{\dot{x}_0^2 - \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2\right)}}$$

תוצאה זו מתאימה רק לתשובה ג'. בכל זאת נבדוק גם את המטען הקשור להזזות ב־ϕ. כבר הבחנו כי הלגרנג'יאן אינו תלוי ב־ϕ ולכן הוא סימטרי להזזה כזו. מטען נתר הוא:

$$Q = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = -\frac{mcr^2\sin^2\theta\dot{\phi}}{\sqrt{\dot{x}_0^2 - \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2\right)}}$$

ושוב אנו רואים כי תשובה ג' מתאימה.

שאלה 6

מי מהמשפטים הבאים אינו נכון?

תשובה

המשפט בתשובה ב' אינו נכון. אוסף המטריצות האוניטריות בגודל 2×2 עם דטרמיננטה 1 הוא החבורה $\mathrm{SU}\left(2\right)$ עצמה, ולא קבוצת היוצרים שלה. מספר היוצרים של $\mathrm{SU}\left(n\right)$ הוא $n^2 - 1$, לכן ל־$\mathrm{SU}\left(2\right)$ יש 3 יוצרים, אך בקבוצה הנתונה יש אינסוף יוצרים.

חלק II

שאלות פתוחות

שאלה 7

התפשטות של גל אלקטרומגנטי בתווך עם מקדם דיאלקטרי ε שאינו קבוע.

סעיף א'

הראו שעבור גל הרמוני, מתוך משוואות מקסוול:

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}=\mathrm{i}\,\frac{\omega}{c}\mathbf{H},\qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H}=-\,\mathrm{i}\,\frac{\omega}{c}\varepsilon\mathbf{E}$$

מתקבלת משוואת הגלים הבאה:

$$\nabla^2\mathbf{E}-\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}\right)+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mathbf{E}=0$$

תשובה

מהזהות:

$$\boldsymbol{\nabla}\times\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}\right)=\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}\right)-\nabla^2\mathbf{A}$$

נקבל:

$$\nabla^2\mathbf{E}-\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}\right)=-\boldsymbol{\nabla}\times\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}\right)=\boldsymbol{\nabla}\times\left(\mathrm{i}\,\frac{\omega}{c}\mathbf{H}\right)=-\,\mathrm{i}\,\frac{\omega}{c}\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H}\right)=-\,\mathrm{i}\,\frac{\omega}{c}\left(-\,\mathrm{i}\,\frac{\omega}{c}\varepsilon\mathbf{E}\right)=-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mathbf{E}$$

ומכאן נובעת המשוואה המבוקשת.

סעיף ב'

עבור גל המתפשט במישור xz בתווך שבו המקדם הדיאלקטרי משתנה, $\varepsilon=\varepsilon\left(z\right)$, הציבו את הפתרון $\mathbf{E}=E\left(z\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}\,\hat{\mathbf{y}}$ והראו שמתקבלת המשוואה:

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\left[\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\varepsilon\left(z\right)-k^2\right]\right\}E\left(z\right)=0$$

תשובה

נציב ונקבל:

$$
\begin{aligned}
&\nabla^2\left[E\left(z\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}\,\hat{\mathbf{y}}\right]-\boldsymbol{\nabla}\left\{\boldsymbol{\nabla}\cdot\left[E\left(z\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}\,\hat{\mathbf{y}}\right]\right\}+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\left(z\right)E\left(z\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}\,\hat{\mathbf{y}}=0\\
\Rightarrow&\nabla^2\left[E\left(z\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}\right]\hat{\mathbf{y}}-\boldsymbol{\nabla}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[E\left(z\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}\right]\right\}+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\left(z\right)E\left(z\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}\,\hat{\mathbf{y}}=0\\
\Rightarrow&\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}\,\nabla^2E\left(z\right)+2\left[\boldsymbol{\nabla}E\left(z\right)\right]\cdot\left[\boldsymbol{\nabla}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}\right]+E\left(z\right)\nabla^2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\left(z\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}\,E\left(z\right)\right\}\hat{\mathbf{y}}=0\\
\Rightarrow&\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}\,\frac{\partial^2}{\partial z^2}E\left(z\right)+2\left[\frac{\partial}{\partial z}E\left(z\right)\hat{\mathbf{z}}\right]\cdot\left[\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}\,\hat{\mathbf{x}}\right]+E\left(z\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\left(z\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}\,E\left(z\right)\right\}\hat{\mathbf{y}}=0\\
\Rightarrow&\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}\,\frac{\partial^2}{\partial z^2}E\left(z\right)+E\left(z\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\left(z\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}\,E\left(z\right)\right\}\hat{\mathbf{y}}=0\\
\Rightarrow&\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}\,\frac{\partial^2}{\partial z^2}E\left(z\right)-k^2E\left(z\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\left(z\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}\,E\left(z\right)\right\}\hat{\mathbf{y}}=0\\
\Rightarrow&\left\{\frac{\partial^2}{\partial z^2}-k^2+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\left(z\right)\right\}E\left(z\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}\,\hat{\mathbf{y}}=0\\
\Rightarrow&\left\{\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\left[\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\varepsilon\left(z\right)-k^2\right]\right\}E\left(z\right)=0
\end{aligned}
$$

כנדרש.

סעיף ג'

בסעיף זה הניחו $k=0$. עבור מקדם דיאלקטרי $\varepsilon\left(z\right)$ שמקיים:

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\varepsilon\left(z\right)=a^2\left(z-z_0\right)$$

כאשר a,z_0 קבועים נתונים, בצעו החלפת משתנים:

$$E\left(z\right)=\sqrt{z-z_0}\tilde{E}\left(z\right),\qquad s=\frac{2}{3}a\left(z-z_0\right)^{3/2}$$

הראו ש־$\tilde{E}\left(z\right)$ הוא פתרון של משוואת בסל. מהו ה־ν (האינדקס של פונקציית בסל המתקבל)? רשמו במפורש את הפתרון ל־$E\left(z\right)$.

תשובה

אם $k=0$, המשוואה שלנו היא:

$$\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\varepsilon\left(z\right)\right\}E\left(z\right)=0$$

נבצע את החלפת המשתנים הראשונה $E\left(z\right)=\sqrt{z-z_0}\tilde{E}\left(z\right)$:

$$
\begin{aligned}
&\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\varepsilon\left(z\right)\right\}\sqrt{z-z_0}\tilde{E}\left(z\right)=0\\
\Rightarrow&\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[\sqrt{z-z_0}\tilde{E}\left(z\right)\right]+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\varepsilon\left(z\right)\sqrt{z-z_0}\tilde{E}\left(z\right)=0\\
\Rightarrow&\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[\sqrt{z-z_0}\right]\tilde{E}\left(z\right)+2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\sqrt{z-z_0}\right]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\tilde{E}\left(z\right)\right]+\sqrt{z-z_0}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[\tilde{E}\left(z\right)\right]+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\varepsilon\left(z\right)\sqrt{z-z_0}\tilde{E}\left(z\right)=0\\
\Rightarrow&-\frac{1}{4\left(z-z_0\right)^{3/2}}\tilde{E}\left(z\right)+2\cdot\frac{1}{2\sqrt{z-z_0}}\tilde{E}'\left(z\right)+\sqrt{z-z_0}\tilde{E}''\left(z\right)+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\varepsilon\left(z\right)\sqrt{z-z_0}\tilde{E}\left(z\right)=0\\
\Rightarrow&\sqrt{z-z_0}\tilde{E}''\left(z\right)+\frac{1}{\sqrt{z-z_0}}\tilde{E}'\left(z\right)+\left[\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\varepsilon\left(z\right)\sqrt{z-z_0}-\frac{1}{4\left(z-z_0\right)^{3/2}}\right]\tilde{E}\left(z\right)=0\\
\Rightarrow&\tilde{E}''\left(z\right)+\frac{1}{z-z_0}\tilde{E}'\left(z\right)+\left[\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\varepsilon\left(z\right)-\frac{1}{4\left(z-z_0\right)^2}\right]\tilde{E}\left(z\right)=0
\end{aligned}
$$

כעת, לביצוע החלפת המשתנים השנייה $s=\frac{2}{3}a\left(z-z_0\right)^{3/2}$, נשים לב כי:

$$z=\left(\frac{3}{2a}\right)^{2/3}s^{2/3}+z_0$$

לכן:

$$\mathrm{d}z=\left(\frac{3}{2a}\right)^{2/3}\frac{2}{3}s^{-1/3}\mathrm{d}s=\left(\frac{3a^2}{2}\right)^{-1/3}s^{-1/3}\mathrm{d}s$$

ומכאן:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}}{\left(\frac{3a^2}{2}\right)^{-1/3}s^{-1/3}\mathrm{d}s}=\left(\frac{3a^2}{2}\right)^{1/3}s^{1/3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}$$

הנגזרת השנייה תהיה:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)\\&=\left(\frac{3a^2}{2}\right)^{1/3}s^{1/3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\left(\frac{3a^2}{2}\right)^{1/3}s^{1/3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right)\\&=\left(\frac{3a^2}{2}\right)^{2/3}s^{1/3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(s^{1/3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right)\\&=\left(\frac{3a^2}{2}\right)^{2/3}s^{1/3}\left(s^{1/3}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}+\frac{1}{3}s^{-2/3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right)\\&=\left(\frac{3a^2}{2}\right)^{2/3}s^{2/3}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}+\frac{1}{3}\left(\frac{3a^2}{2}\right)^{2/3}s^{-1/3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\end{aligned}$$

כמו כן נזכור כי המקדם הדיאלקטרי מקיים:

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\varepsilon\left(z\right)=a^2\left(z-z_0\right)=a^2\left(\frac{3}{2a}\right)^{2/3}s^{2/3}$$

ולכן לאחר החלפת המשתנים נקבל:

$$\begin{aligned}&\left[\left(\frac{3a^2}{2}\right)^{2/3}s^{2/3}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}+\frac{1}{3}\left(\frac{3a^2}{2}\right)^{2/3}s^{-1/3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right]\tilde{E}\left(s\right)\\&+\left(\frac{3}{2a}\right)^{-2/3}s^{-2/3}\left(\frac{3a^2}{2}\right)^{1/3}s^{1/3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\tilde{E}\left(s\right)+\left[a^2\left(\frac{3}{2a}\right)^{2/3}s^{2/3}-\frac{1}{4\left(\frac{3}{2a}\right)^{4/3}s^{4/3}}\right]\tilde{E}\left(s\right)=0\\&\Rightarrow\left(\frac{3a^2}{2}\right)^{2/3}s^{2/3}\tilde{E}''\left(s\right)+\left[\frac{1}{3}\left(\frac{3a^2}{2}\right)^{2/3}+\left(\frac{2a^4}{3}\right)^{1/3}\right]s^{-1/3}\tilde{E}'\left(s\right)+\left[a^2\left(\frac{3}{2a}\right)^{2/3}s^{2/3}-\frac{1}{4}\left(\frac{2a}{3}\right)^{4/3}s^{-4/3}\right]\tilde{E}\left(s\right)=0\\&\Rightarrow\left(\frac{3a^2}{2}\right)^{2/3}\tilde{E}''\left(s\right)+\left[\frac{1}{3}\left(\frac{3a^2}{2}\right)^{2/3}+\left(\frac{2a^4}{3}\right)^{1/3}\right]\frac{1}{s}\tilde{E}'\left(s\right)+\left[a^2\left(\frac{3}{2a}\right)^{2/3}-\frac{1}{4}\left(\frac{2a}{3}\right)^{4/3}\frac{1}{s^2}\right]\tilde{E}\left(s\right)=0\\&\Rightarrow\tilde{E}''\left(s\right)+\left[\frac{1}{3}+\left(\frac{8}{27}\right)^{1/3}\right]\frac{1}{s}\tilde{E}'\left(s\right)+\left[a^2\left(\frac{1}{a^3}\right)^{2/3}-\frac{1}{4}\left(\frac{8}{27}\right)^{2/3}\frac{1}{s^2}\right]\tilde{E}\left(s\right)=0\\&\Rightarrow\tilde{E}''\left(s\right)+\frac{1}{s}\tilde{E}'\left(s\right)+\left[1-\frac{\left(1/3\right)^2}{s^2}\right]\tilde{E}\left(s\right)=0\end{aligned}$$

זוהי משוואת בסל עם אינדקס $\nu=\frac{1}{3}$, ופתרון המשוואה הוא:

$$\tilde{E}\left(s\right)=C_1J_{1/3}\left(s\right)+C_2J_{-1/3}\left(s\right)$$

כאשר J_n הן פונקציות בסל מהסוג הראשון ו־$C_{1,2}$ הם קבועים כלשהם שנקבעים לפי תנאי ההתחלה. הפתרון למשוואה המקורית יהיה, אם כן:

$$E\left(z\right)=\sqrt{z-z_0}\tilde{E}\left(z\right)=\sqrt{z-z_0}\left\{C_1J_{1/3}\left[\frac{2}{3}a\left(z-z_0\right)^{3/2}\right]+C_2J_{-1/3}\left[\frac{2}{3}a\left(z-z_0\right)^{3/2}\right]\right\}$$

סעיף ד'

עבור $\varepsilon\left(z\right)$ כללי, מהו התנאי על $\omega,k,\varepsilon\left(z\right)$ כך שנוכל להשתמש בפתרון WKB?

תשובה

עבור משוואה כללית:

$$\psi''\left(x\right)+q^{2}\left(x\right)\psi\left(x\right)=0$$

התנאי לקירוב WKB הוא:

$$\left|\frac{1}{q}\frac{\mathrm{d}\ln q}{\mathrm{d}x}\right|=\left|\frac{1}{q^{2}}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{q}\right)\right|\ll1$$

במקרה שלנו, המשוואה היא:

$$E''\left(z\right)+\left[\left(\frac{\omega}{c}\right)^{2}\varepsilon\left(z\right)-k^{2}\right]E\left(z\right)=0$$

לכן:

$$q\left(z\right)=\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^{2}\varepsilon\left(z\right)-k^{2}}$$

ונדרוש:

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{q^{2}}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}z}\right| & =\left|\frac{1}{\left(\frac{\omega}{c}\right)^{2}\varepsilon\left(z\right)-k^{2}}\frac{\mathrm{d}\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^{2}\varepsilon\left(z\right)-k^{2}}}{\mathrm{d}z}\right|\\
 & =\left|\frac{1}{\left(\frac{\omega}{c}\right)^{2}\varepsilon\left(z\right)-k^{2}}\cdot\frac{\left(\frac{\omega}{c}\right)^{2}\varepsilon'\left(z\right)}{2\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^{2}\varepsilon\left(z\right)-k^{2}}}\right|\\
 & =\left|\frac{\left(\frac{\omega}{c}\right)^{2}\varepsilon'\left(z\right)}{2\left[\left(\frac{\omega}{c}\right)^{2}\varepsilon\left(z\right)-k^{2}\right]^{3/2}}\right|\ll1
\end{aligned}$$

סעיף ה'

הניחו שמתקיימים התנאים ל־WKB ושהגודל:

$$q^{2}=k^{2}-\left(\frac{\omega}{c}\right)^{2}\varepsilon\left(z\right)$$

שלילי עבור $z>0$ וחיובי עבור $z<0$. מהו הפתרון המקורב, עד כדי פאזה, בכל אחד מהמקרים?

תשובה

הבעיה שקולה, למעשה, לפתרון של משוואת שרדינגר עם פוטנציאל:

$$V\left(z\right)\propto\varepsilon\left(z\right)$$

כאשר הנקודה $z=0$ היא נקודת מעבר (בה האנרגיה משתווה לפוטנציאל ו־$q\left(z\right)$ מתאפס). עבור $z<0$ הגודל q הוא ממשי ולכן אנחנו בתחום הקלאסי, ועבור $z>0$ הגודל q הוא מדומה ולכן אנו בתחום הלא־קלאסי. באמצעות נוסחאות הקישור נקבל

את הפתרון המקורב הבא (אשר פשוט הועתק מדף הנוסחאות, עם $p\left(z\right)=\hbar q\left(z\right)$):

$$E\left(z\right)\approx\begin{cases}\dfrac{2D}{\sqrt{\hbar q\left(z\right)}}\sin\left(\displaystyle\int_{z}^{0}q\left(t\right)\mathrm{d}t+\frac{\pi}{4}\right) & z<0\\ \dfrac{D}{\sqrt{\left|\hbar q\left(z\right)\right|}}\exp\left(-\displaystyle\int_{0}^{z}\left|q\left(t\right)\right|\mathrm{d}t\right) & z>0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2D}{\sqrt{\hbar}\left(k^{2}-\left(\frac{\omega}{c}\right)^{2}\varepsilon\left(z\right)\right)^{1/4}}\sin\left(\displaystyle\int_{z}^{0}\sqrt{k^{2}-\left(\frac{\omega}{c}\right)^{2}\varepsilon\left(z\right)}\mathrm{d}t+\frac{\pi}{4}\right) & z<0\\ \dfrac{D}{\sqrt{\hbar}\left|k^{2}-\left(\frac{\omega}{c}\right)^{2}\varepsilon\left(z\right)\right|^{1/4}}\exp\left(-\displaystyle\int_{0}^{z}\sqrt{\left|k^{2}-\left(\frac{\omega}{c}\right)^{2}\varepsilon\left(z\right)\right|}\mathrm{d}t\right) & z>0\end{cases}$$

כאשר הקבוע D הוא קבוע שרירותי.

שאלה 8

נדון בחלקיק במימד אחד בעל מסה m שנתון בפוטנציאל הבא:

$$V\left(x\right)=\frac{1}{2}m\omega^{2}x^{2}+\frac{\hbar^{2}}{2m}\frac{\alpha}{x^{2}}$$

סעיף א'

רשמו את משוואת שרדינגר:

$$\left[-\frac{\hbar^{2}}{2m}\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}+V\left(x\right)\right]\psi\left(x\right)=E\psi\left(x\right)$$

באמצעות קואורדינטה חסרת מימדים:

$$y=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$$

השתמשו בסימון $\lambda=\frac{2E}{\hbar\omega}$.

תשובה

ראשית, נציב את הפוטנציאל הנתון במשוואה:

$$\left[-\frac{\hbar^{2}}{2m}\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}+\frac{1}{2}m\omega^{2}x^{2}+\frac{\hbar^{2}}{2m}\frac{\alpha}{x^{2}}\right]\psi\left(x\right)=E\psi\left(x\right)$$

נשים לב כי:

$$x=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}y$$

לכן:

$$\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}=\frac{\partial^{2}}{\partial\left(\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}y\right)^{2}}=\frac{m\omega}{\hbar}\frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}}$$

ולאחר החלפת המשתנים נקבל:

$$
\begin{aligned}
&\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{m\omega}{\hbar}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{1}{2}m\omega^2\left(\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}y\right)^2+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\alpha}{\left(\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}y\right)^2}\right]\psi\left(y\right)=E\psi\left(y\right)\\
\Rightarrow&\left[-\frac{\hbar\omega}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\hbar\omega}{2}y^2+\frac{\hbar\omega}{2}\frac{\alpha}{y^2}\right]\psi\left(y\right)=E\psi\left(y\right)\\
\Rightarrow&\left[-\frac{\partial^2}{\partial y^2}+y^2+\frac{\alpha}{y^2}\right]\psi\left(y\right)=\frac{2E}{\hbar\omega}\psi\left(y\right)\\
\Rightarrow&\left[-\frac{\partial^2}{\partial y^2}+y^2+\frac{\alpha}{y^2}\right]\psi\left(y\right)=\lambda\psi\left(y\right)
\end{aligned}
$$

כאשר סימנו $\lambda=\frac{2E}{\hbar\omega}$.

סעיף ב'

עבור $\alpha=0$, מהם המצבים העצמיים $\psi_n\left(y\right)$ ומהם הערכים העצמיים של האנרגיה?

תשובה

כאשר $\alpha=0$ המשוואה תהיה:

$$
\begin{aligned}
&\left[-\frac{\partial^2}{\partial y^2}+y^2\right]\psi\left(y\right)=\lambda\psi\left(y\right)\\
\Rightarrow&\psi''\left(y\right)+\left(\lambda-y^2\right)\psi\left(y\right)=0
\end{aligned}
$$

כידוע (מדף הנוסחאות), פתרון משוואה זו ניתן באמצעות פולינומי הרמיט, כאשר $\lambda=2n+1$:

$$\psi_n\left(y\right)=2^{-n/2}\pi^{-1/4}\left(n!\right)^{-1/2}\mathrm{e}^{-y^2/2}H_n\left(y\right)$$

והערכים העצמיים של האנרגיה הם:

$$E_n=\frac{\lambda\hbar\omega}{2}=\frac{\left(2n+1\right)\hbar\omega}{2}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

סעיף ג'

עבור $\alpha\neq0$ רשמו את המשוואה לאחר החלפת משתנים נוספת $z=y^2$.

תשובה

כזכור, המשוואה בה אנו עוסקים היא:

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial y^2}+y^2+\frac{\alpha}{y^2}\right]\psi\left(y\right)=\lambda\psi\left(y\right)$$

נבצע את החלפת המשתנים:

$$y=\sqrt{z}$$

הנגזרת הראשונה תהיה:

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial\left(\sqrt{z}\right)}=\frac{\partial}{\frac{1}{2\sqrt{z}}\partial z}=2\sqrt{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

והנגזרת השנייה:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\\ &= 2\sqrt{z}\frac{\partial}{\partial z}\left(2\sqrt{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\\ &= 4\sqrt{z}\left(\sqrt{z}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{1}{2\sqrt{z}}\frac{\partial}{\partial z}\right)\\ &= 4z\frac{\partial^2}{\partial z^2}+2\frac{\partial}{\partial z}\end{aligned}$$

מכאן נקבל:

$$\begin{gathered}\left[-4z\frac{\partial^2}{\partial z^2}-2\frac{\partial}{\partial z}+z+\frac{\alpha}{z}\right]\psi(z)=\lambda\psi(z)\\ \Rightarrow 4z\frac{\partial^2}{\partial z^2}\psi(z)+2\frac{\partial}{\partial z}\psi(z)-\left(z+\frac{\alpha}{z}-\lambda\right)\psi(z)=0\end{gathered}$$

סעיף ד'

השתמשו בהצבה:

$$\psi(z)=\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}\,z^{\frac{\beta+1}{2}}w(z)$$

ומצאו את המשוואה המתקבלת עבור $w(z)$. קבעו מהו התנאי ש־β צריך לקיים על מנת שתתקבל משוואה היפרגאומטרית מתלכדת (קונפלואנטית):

$$z\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}w(z)+(c-z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}w(z)-aw(z)=0$$

ומצאו מהם a,c.

תשובה

אין סיבה שנתעסק בביטוי המסובך $\frac{\beta+1}{2}$ במעריך של z; נסמן לשם הפשטות $\gamma=\frac{\beta+1}{2}$. כעת נחשב את הנגזרות:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\psi(z) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}\,z^{\gamma}w(z)\right]\\ &= -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}\,z^{\gamma}w(z)+\gamma\,\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}\,z^{\gamma-1}w(z)+\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}\,z^{\gamma}w'(z)\\ &= \mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}\,z^{\gamma}\left[-\frac{1}{2}w(z)+\gamma z^{-1}w(z)+w'(z)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\psi(z) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left\{\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}\,z^{\gamma}\left[-\frac{1}{2}w(z)+\gamma z^{-1}w(z)+w'(z)\right]\right\}\\ &= -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}\,z^{\gamma}\left[-\frac{1}{2}w(z)+\gamma z^{-1}w(z)+w'(z)\right]+\gamma\,\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}\,z^{\gamma-1}\left[-\frac{1}{2}w(z)+\gamma z^{-1}w(z)+w'(z)\right]+\\ &\quad+\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}\,z^{\gamma}\left[-\frac{1}{2}w'(z)-\gamma z^{-2}w(z)+\gamma z^{-1}w'(z)+w''(z)\right]\\ &= \mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}\,z^{\gamma}\left\{-\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}w(z)+\gamma z^{-1}w(z)+w'(z)\right]+\gamma z^{-1}\left[-\frac{1}{2}w(z)+\gamma z^{-1}w(z)+w'(z)\right]+\right.\\ &\qquad\left.-\frac{1}{2}w'(z)-\gamma z^{-2}w(z)+\gamma z^{-1}w'(z)+w''(z)\right\}\\ &= \mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}\,z^{\gamma}\left\{\frac{1}{4}w(z)-\frac{1}{2}\gamma z^{-1}w(z)-\frac{1}{2}w'(z)-\frac{1}{2}\gamma z^{-1}w(z)+\gamma^2z^{-2}w(z)+\gamma z^{-1}w'(z)+\right.\\ &\qquad\left.-\frac{1}{2}w'(z)-\gamma z^{-2}w(z)+\gamma z^{-1}w'(z)+w''(z)\right\}\\ &= \mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}\,z^{\gamma}\left[w''(z)+\left(2\gamma z^{-1}-1\right)w'(z)+\left(\frac{1}{4}-\gamma z^{-1}+\gamma^2z^{-2}-\gamma z^{-2}\right)w(z)\right]\end{aligned}$$

נציב במשוואה שמצאנו בסעיף הקודם ונקבל:

$$\begin{aligned}
&4z\,\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}\,z^{\gamma}\left[w''(z)+\left(2\gamma z^{-1}-1\right)w'(z)+\left(\frac{1}{4}-\gamma z^{-1}+\gamma^{2}z^{-2}-\gamma z^{-2}\right)w(z)\right]+\\
&+2\,\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}\,z^{\gamma}\left[-\frac{1}{2}w(z)+\gamma z^{-1}w(z)+w'(z)\right]-\left(z+\frac{\alpha}{z}-\lambda\right)\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}\,z^{\gamma}w(z)=0\\
\Rightarrow&4z\left[w''(z)+\left(2\gamma z^{-1}-1\right)w'(z)+\left(\frac{1}{4}-\gamma z^{-1}+\gamma^{2}z^{-2}-\gamma z^{-2}\right)w(z)\right]+\\
&+2\left[-\frac{1}{2}w(z)+\gamma z^{-1}w(z)+w'(z)\right]-\left(z+\frac{\alpha}{z}-\lambda\right)w(z)=0\\
\Rightarrow&4zw''(z)+(8\gamma-4z+2)\,w'(z)+\left[\left(z-4\gamma+4\gamma^{2}z^{-1}-4\gamma z^{-1}\right)-1+2\gamma z^{-1}-\left(z+\frac{\alpha}{z}-\lambda\right)\right]w(z)=0\\
\Rightarrow&4zw''(z)+(8\gamma-4z+2)\,w'(z)+\left[\left(4\gamma^{2}-2\gamma-\alpha\right)z^{-1}+\lambda-4\gamma-1\right]w(z)=0\\
\Rightarrow&zw''(z)+\left(2\gamma+\frac{1}{2}-z\right)w'(z)-\left[\gamma+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\lambda-\left(\gamma^{2}-\frac{1}{2}\gamma-\frac{1}{4}\alpha\right)z^{-1}\right]w(z)=0
\end{aligned}$$

נציב בחזרה את β ונקבל:

$$\begin{aligned}
&z\frac{\mathrm{d}^{2}}{\mathrm{d}z^{2}}w(z)+\left(2\cdot\frac{\beta+1}{2}+\frac{1}{2}-z\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}w(z)-\left[\frac{\beta+1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\lambda-\left(\left(\frac{\beta+1}{2}\right)^{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\beta+1}{2}-\frac{1}{4}\alpha\right)z^{-1}\right]w(z)=0\\
\Rightarrow&z\frac{\mathrm{d}^{2}}{\mathrm{d}z^{2}}w(z)+\left(\beta+\frac{3}{2}-z\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}w(z)-\left[\frac{\beta}{2}+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\lambda-\left(\frac{\beta^{2}+2\beta+1}{4}-\frac{\beta+1}{4}-\frac{1}{4}\alpha\right)z^{-1}\right]w(z)=0\\
\Rightarrow&z\frac{\mathrm{d}^{2}}{\mathrm{d}z^{2}}w(z)+\left[\left(\beta+\frac{3}{2}\right)-z\right]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}w(z)-\frac{1}{4}\left[2\beta+3-\lambda-\left(\beta^{2}+\beta-\alpha\right)z^{-1}\right]w(z)=0
\end{aligned}$$

כדי לקבל משוואה היפרגאומטרית, המקדם של $w(z)$ צריך להיות קבוע, כלומר לא תלוי ב־z. לכן נדרוש:

$$\beta^{2}+\beta-\alpha=0\Longrightarrow\beta=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\alpha}}{2}$$

אם תנאי זה מתקיים, אז המשוואה תהיה:

$$z\frac{\mathrm{d}^{2}}{\mathrm{d}z^{2}}w(z)+(c-z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}w(z)-aw(z)=0$$

כאשר:

$$c=\beta+\frac{3}{2},\qquad a=\frac{1}{4}\left(2\beta+3-\lambda\right)$$

סעיף ה'

פתרון אחד של המשוואה ניתן ע"י $_1F_1(a,c,z)$. כאשר a הוא לא מספר שלם שלילי, ההתנהגות האסימפטוטית של פונקציה זו היא:

$$_1F_1(a,c,z)\sim\mathrm{e}^{z}\,z^{a-c}$$

כאשר a הוא כן מספר שלם שלילי, לפונקציה $_1F_1(a,c,z)$ התנהגות אסימפטוטית שונה, וניתן לנרמל אותה. מה הסיבה להבדל בין שני המקרים? מהם הערכים העצמיים של האנרגיה המתקבלים מתוך הדרישה שהפתרון העצמי יהיה ניתן לנירמול? מהו הפתרון ל־$\psi(x)$ המתקבל התנאים אלה?

תשובה

הפונקציה ההיפרגאומטרית המתלכדת $_1F_1(a,c,z)$ מוגדרת כך:

$$_1F_1(a,c,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}$$

כאשר $(a)_n$ הוא סמל פוכהאמר:

$$(a)_n = \underbrace{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)}_{n\text{ terms}} = \frac{(a-1+n)!}{(a-1)!} = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$$

אם a הוא מספר שלם שלילי, אז $\Gamma(a)\to\infty$. עבור $n>|a|$ נקבל $a+n>0$ ולכן $\Gamma(a+n)<\infty$. מכאן, לכל $n>|a|$:

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = 0$$

לכן במקרה של a שלם שלילי הפונקציה תהיה פולינום ממעלה לכל היותר $|a|$, וההתנהגות האסימפטוטית תהיה ${}_1F_1(a,c,z)\sim z^{|a|}$ (עד כדי המקדם של $z^{|a|}$). בסעיף הקודם מצאנו:

$$a = \frac{1}{4}(2\beta+3-\lambda)$$

אם נרשום $a=-n$ כאשר n מספר טבעי נקבל:

$$\lambda_n = 4n+2\beta+3$$

אלה הם הערכים העצמיים המתקבלים מהדרישה לנירמול (שראינו שהיא שקולה לדרישה ש־a שלם שלילי). נזכור כי $\lambda=\frac{2E}{\hbar\omega}$ ומכאן נקבל את הערכים העצמיים של האנרגיה:

$$E_n = \frac{\lambda_n\hbar\omega}{2} = \left(2n+\beta+\frac{3}{2}\right)\hbar\omega$$

הפתרון ל־$\psi(z)$, לפי ההצבה מהסעיף הקודם, הוא:

$$\psi(z) = \mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}\,z^{\frac{\beta+1}{2}}w(z) = \mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}\,z^{\frac{\beta+1}{2}}{}_1F_1(a,c,z) = \mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}\,z^{\frac{\beta+1}{2}}{}_1F_1\left(\frac{1}{2}\beta+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\lambda,\beta+\frac{3}{2},z\right)$$

נחזור למשתנה y לפי ההצבה מסעיף ג':

$$\psi(y) = \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\,y^{\beta+1}{}_1F_1\left(\frac{1}{2}\beta+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\lambda,\beta+\frac{3}{2},y^2\right)$$

ולבסוף נחזור למשתנה המקורי x לפי ההצבה מסעיף א':

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \exp\left(-\frac{\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)^2}{2}\right)\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)^{\beta+1}{}_1F_1\left(\frac{1}{2}\beta+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\lambda,\beta+\frac{3}{2},\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)^2\right)\\ &= \exp\left(-\frac{\frac{m\omega}{\hbar}x^2}{2}\right)\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{\beta+1}{2}}x^{\beta+1}{}_1F_1\left(\frac{1}{2}\beta+\frac{3}{4}-\frac{E}{2\hbar\omega},\beta+\frac{3}{2},\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right)\end{aligned}$$

כאשר, כזכור, התנאי על β הוא:

$$\beta = \frac{-1\pm\sqrt{1+4\alpha}}{2}$$

שאלה 9

נתון הלגרנג'יאן:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}_i\dot{x}_i + \frac{e}{c}A_i(\mathbf{x})\dot{x}_i$$

סעיף א'

עבור המקרה $e=0$, תחת אילו טרנספורמציות הפעולה אינווריאנטית, ומהם מטעני נתר המתאימים? בדקו הזזות במרחב, סיבובים (כלומר $\delta x_k=\varepsilon_{klm}\alpha_l x_m$), הזזות בזמן ומתיחה (כלומר $\delta x_k=\varepsilon x_k, \delta t=2\varepsilon t$).

תשובה

ראשית הערה לגבי הסימון - למרות שלא ציינו זאת במפורש, בסימון הנ"ל משתמשים בכלל הסכימה של איינשטיין:

$$\dot{x}_i\dot{x}_i=\sum_i \dot{x}_i^2, \qquad A_i(\mathbf{x})\,\dot{x}_i=\sum_i A_i(\mathbf{x})\,\dot{x}_i$$

כאשר $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_2)$. לשם הפשטות נרשום את הלגרנג'יאן במפורש ללא כלל הסכימה:

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}m\sum_i \dot{x}_i^2+\frac{e}{c}\sum_i A_i(\mathbf{x})\,\dot{x}_i$$

אם $e=0$ נקבל:

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}m\sum_i \dot{x}_i^2$$

כעת נבדוק את הטרנספורמציות.

הזזה במרחב, בקואורדינטה x_i**:**

$$x_i\mapsto x_i+\delta x_i$$

השינוי δx_i קבוע בזמן, לכן הנגזרת $\dot{x}_i$ אינה משתנה והלגרנג'יאן נשמר. מטען נתר הוא:

$$Q_i=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_i}=m\dot{x}_i$$

גודל זה הוא התנע בכיוון x_i, כלומר מצאנו את חוק שימור התנע.

סיבוב:

$$x_k\mapsto x_k+\delta x_k=x_k+\varepsilon_{klm}\alpha_l x_m$$

ראשית, נסביר מדוע בכלל הטרנספורמציה הזאת מייצגת סיבוב. כידוע:

$$\varepsilon_{klm}\alpha_l x_m=(\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{x})_k$$

כלומר לקואורדינטה k של וקטור המיקום $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$ מוסיפים את רכיב k של המכפלה הווקטורית $\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{x}$. בכתיב וקטורי, הטרנספורמציה שאנו מבצעים היא בעצם:

$$\mathbf{x}\to\mathbf{x}+\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{x}$$

כאשר $\boldsymbol{\alpha}$ הוא וקטור **אינפיניטסימלי** (כמו תמיד, גם כאן אני עוסקים בטרנספורמציה אינפיניטסימלית, וסיבוב בזווית כלשהי הוא סכום של סיבובים אינפיניטסימליים). נרשום:

$$\boldsymbol{\alpha}=\delta\theta\hat{\mathbf{n}}$$

כאשר $\delta\theta$ היא זווית הסיבוב האינפינטסימלית ו־$\hat{\mathbf{n}}$ הוא וקטור יחידה המציין את הציר שסביבו מסובבים. אז הטרנספורמציה היא:

$$\mathbf{x}\to\mathbf{x}+\delta\theta\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{x}$$

נניח כי מערכת הקואורדינטות שלנו היא קרטזית ואנו מסובבים בזווית $\delta\theta$ סביב ציר z: $\hat{\mathbf{n}}=\hat{\mathbf{z}}$. וקטור המיקום יהיה:

$$\mathbf{x}=x\hat{\mathbf{x}}+y\hat{\mathbf{y}}+z\hat{\mathbf{z}}$$

ולכן:

$$\begin{aligned}\delta\theta\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{x}&=\delta\theta\hat{\mathbf{z}}\times(x\hat{\mathbf{x}}+y\hat{\mathbf{y}}+z\hat{\mathbf{z}})\\&=x\delta\theta\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{x}}+y\delta\theta\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{y}}+z\delta\theta\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{z}}\\&=x\delta\theta\hat{\mathbf{y}}-y\delta\theta\hat{\mathbf{x}}\end{aligned}$$

כלומר, מרכיב $\hat{\mathbf{x}}$ של וקטור המיקום החסרנו $y\delta\theta$, לרכיב $\hat{\mathbf{y}}$ הוספנו $x\delta\theta$ ואת רכיב $\hat{\mathbf{z}}$ לא שינינו. מדוע טרנספורמציה זו מייצגת סיבוב? ראשית, ברור שבסיבוב סביב ציר z, רכיב $\hat{\mathbf{z}}$ של וקטור המיקום לא ישתנה. שנית, הסיבוב בזווית $\delta\theta$ במישור xy נתון ע"י מטריצת סיבוב:

$$\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\delta\theta) & -\sin(\delta\theta) \\ \sin(\delta\theta) & \cos(\delta\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -\delta\theta \\ \delta\theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y\delta\theta \\ y + x\delta\theta \end{pmatrix}$$

ואנו רואים כי אכן, בפיתוח בסדר ראשון ב־$\delta\theta$ קיבלנו בדיוק את הטרנספורמציה הנתונה.

כעת, מאחר שהלגרנג'יאן תלוי רק באורך של הווקטור $\mathbf{x}$, וטרנספורמציית סיבוב לא משנה את אורך הווקטור, ברור כי הלגרנג'יאן נשמר. מטען נתר הוא:

$$\begin{aligned} Q &= \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_k} \frac{\partial(\delta x_k)}{\partial(\delta\theta)} \\ &= \sum_k m\dot{x}_k \frac{\partial(\varepsilon_{klm}\delta\theta n_l x_m)}{\partial(\delta\theta)} \\ &= m \sum_k \dot{x}_k \varepsilon_{klm} n_l x_m \\ &= m \sum_k \dot{x}_k (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{x})_k \\ &= m\dot{\mathbf{x}} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{x}) \\ &= m\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}) \\ &= \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{x} \times m\dot{\mathbf{x}}) \\ &= \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{p}) \\ &= \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{L} \end{aligned}$$

כאשר כזכור $\hat{\mathbf{n}} = (n_1, n_2, n_3)$ הוא ציר הסיבוב, והשתמשנו בזהות $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$. אם כן, הגודל הנשמר הוא הרכיב של התנע הזוויתי $\mathbf{L}$ בכיוון הציר $\hat{\mathbf{n}}$. בצורה דומה ניתן לראות ששני רכיבי $\mathbf{L}$ הנותרים נשמרים, לכן התנע הזוויתי כולו נשמר.

הזזה בזמן:

$$t \mapsto t + \delta t$$

הלגרנג'יאן אינו תלוי ישירות בזמן ולכן הוא נשמר. מטען נתר הוא:

$$Q = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i - \mathcal{L} = \sum_i m\dot{x}_i \cdot \dot{x}_i - \frac{1}{2} m \sum_i \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2} m \sum_i \dot{x}_i^2$$

זוהי האנרגיה הקינטית.

מתיחה:

$$x_k \mapsto x_k + \varepsilon x_k, \qquad t \mapsto t + 2\varepsilon t$$

ראשית, נבחין כי הטרנספורמציות הנתונות הן פיתוחים לסדר ראשון של הטרנספורמציות הבאות:

$$x_k \mapsto \mathrm{e}^{\varepsilon} x_k, \qquad t \mapsto \mathrm{e}^{2\varepsilon} t$$

מכאן נקבל:

$$\dot{x}_k \mapsto \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{\varepsilon} x_k)}{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2\varepsilon} t)} = \frac{\mathrm{e}^{\varepsilon}\, \mathrm{d}x_k}{\mathrm{e}^{2\varepsilon}\, \mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{-\varepsilon} \dot{x}_k \approx \dot{x}_k - \varepsilon \dot{x}_k$$

לכן $\delta\dot{x}_k=-\varepsilon\dot{x}_k$. כעת, נבדוק את הווריאציה על הפעולה ישירות (כפי שיש לעשות במקרים כאלה!):

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S}&=\delta\left(\int\mathcal{L}\mathrm{d}t\right)\\&=\int\mathcal{L}\delta\left(\mathrm{d}t\right)+\int\delta\left(\mathcal{L}\right)\mathrm{d}t\\&=\int\frac{1}{2}m\sum_i\dot{x}_i^2\delta\left(\mathrm{d}t\right)+\int\delta\left(\frac{1}{2}m\sum_i\dot{x}_i^2\right)\mathrm{d}t\\&=\int\frac{1}{2}m\sum_i\dot{x}_i^2\cdot2\varepsilon\mathrm{d}t+\int\frac{1}{2}m\sum_i2\dot{x}_i\cdot\left(-\varepsilon\dot{x}_k\right)\mathrm{d}t\\&=\int m\sum_i\dot{x}_i^2\varepsilon\mathrm{d}t-\int m\sum_i\dot{x}_i^2\varepsilon\mathrm{d}t\\&=0\end{aligned}$$

ואכן, הפעולה אינווריאנטית. מטען נתר הוא:

$$\begin{aligned}Q&=\left(\sum_i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_i}\dot{x}_i-\mathcal{L}\right)\frac{\partial\left(\delta t\right)}{\partial\varepsilon}-\sum_i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_i}\frac{\partial\left(\delta x_i\right)}{\partial\varepsilon}\\&=\left(\sum_i m\dot{x}_i\cdot\dot{x}_i-\frac{1}{2}m\sum_i\dot{x}_i^2\right)2t-\sum_i m\dot{x}_i\cdot x_i\\&=tm\sum_i\dot{x}_i^2-\sum_i m\dot{x}_ix_i\\&=2Kt-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\end{aligned}$$

כאשר K היא האנרגיה הקינטית, $\mathbf{p}$ הוא התנע ו־$\mathbf{x}$ הוא וקטור המיקום.

סעיף ב'

עבור $e\neq0$, מצאו את משוואות אוילר־לגרנג'. שימו לב ש־$A_i\left(\mathbf{x}\right)$ היא פונקציה נתונה של המשתנים x_i, ללא תלות בזמן, ואינה משתנה דינמי נוסף. מצאו את הקשר למשוואות הכוח של לורנץ.

תשובה

הלגרנג'יאן המלא הוא:

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}m\sum_i\dot{x}_i^2+\frac{e}{c}\sum_iA_i\left(\mathbf{x}\right)\dot{x}_i$$

משוואות אוילר־לגרנג', עבור מספר משתנים תלויים, הן:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{x}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{x}}},\qquad\dot{\mathbf{x}}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}$$

נשים לב כי זהו סט של 3 משוואות, אחת לכל רכיב של וקטור המיקום $\mathbf{x}$. נציב את הלגרנג'יאן שלנו ונקבל:

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\left(\frac{1}{2}m\sum_i\dot{x}_i^2+\frac{e}{c}\sum_iA_i\left(\mathbf{x}\right)\dot{x}_i\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{\mathbf{x}}}\left(\frac{1}{2}m\sum_i\dot{x}_i^2+\frac{e}{c}\sum_iA_i\left(\mathbf{x}\right)\dot{x}_i\right)$$

נגזור כל ביטוי בנפרד, בזהירות, עבור קואורדינטה כללית x_k:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{2}m\sum_i\dot{x}_i^2\right)=0$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{e}{c}\sum_iA_i\left(\mathbf{x}\right)\dot{x}_i\right)&=\frac{e}{c}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_iA_i\left(\mathbf{x}\right)\dot{x}_i\right)\\&=\frac{e}{c}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\mathbf{A}\cdot\dot{\mathbf{x}}\right)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}_k}\left(\frac{1}{2}m\sum_i \dot{x}_i^2\right) = \frac{1}{2}m\sum_i \frac{\partial \dot{x}_i^2}{\partial \dot{x}_k} = m\dot{x}_k$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}_k}\left(\frac{e}{c}\sum_i A_i\left(\mathbf{x}\right)\dot{x}_i\right) = \frac{e}{c}\sum_i A_i\left(\mathbf{x}\right)\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_k} = \frac{e}{c}A_k\left(\mathbf{x}\right)$$

מכאן, המשוואה עבור הקואורדינטה x_k תהיה:

$$\frac{e}{c}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\mathbf{A}\cdot\dot{\mathbf{x}}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\dot{x}_k + \frac{e}{c}A_k\left(\mathbf{x}\right)\right)$$

כעת נגזור לפי הזמן. הביטוי הראשון יהיה:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\dot{x}_k\right) = m\ddot{x}_k$$

הפונקציה $\mathbf{A}$ אמנם אינה תלויה בזמן, אך היא **אינה** מתאפסת בעת גזירה לפי הזמן, כי הנגזרת היא שלמה ולא חלקית! מכלל השרשרת נקבל:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{e}{c}A_k\left(\mathbf{x}\right)\right) = \frac{e}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(A_k\left(\mathbf{x}\right)\right) = \frac{e}{c}\left(\sum_i \dot{x}_i\frac{\partial A_k}{\partial x_i}\right) = \frac{e}{c}\left(\dot{\mathbf{x}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)A_k$$

ובסה"כ:

$$\frac{e}{c}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\mathbf{A}\cdot\dot{\mathbf{x}}\right) = m\ddot{x}_k + \frac{e}{c}\left(\dot{\mathbf{x}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)A_k$$

נאחד את סט המשוואות שקיבלנו (אחת לכל קואורדינטה) למשוואה וקטורית אחת:

$$\frac{e}{c}\boldsymbol{\nabla}\left(\mathbf{A}\cdot\dot{\mathbf{x}}\right) = m\ddot{\mathbf{x}} + \frac{e}{c}\left(\dot{\mathbf{x}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\mathbf{A}$$

הביטוי $m\ddot{\mathbf{x}}$ הוא, כמובן, כוח. נעביר אגפים ונקבל:

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{x}} = \frac{e}{c}\left[\boldsymbol{\nabla}\left(\mathbf{A}\cdot\dot{\mathbf{x}}\right) - \left(\dot{\mathbf{x}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\mathbf{A}\right]$$

לבסוף נשתמש בזהות:

$$\mathbf{b}\left(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}\right) - \left(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\right)\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\left(\mathbf{b}\times\mathbf{c}\right)$$

כדי לקבל:

$$\mathbf{F} = \frac{e}{c}\dot{\mathbf{x}}\times\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}\right)$$

כעת, אם $\mathbf{A}$ הוא הפוטנציאל המגנטי הווקטורי, אז מתקיים $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} = \mathbf{B}$ ולכן:

$$\mathbf{F} = \frac{e}{c}\dot{\mathbf{x}}\times\mathbf{B}$$

זהו כוח לורנץ עבור השדה המגנטי, כפי שרצינו להראות. בסעיף זה לא קיים כוח חשמלי, כי בלגרנג'יאן הנתון אין פוטנציאל סקלרי ול־$\mathbf{A}$ אין נגזרת חלקית לפי הזמן.

סעיף ג'

האם האנרגיה עדיין נשמרת, ואם כן, מהי?

תשובה

נזכור כי הלגרנג'יאן הוא:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\sum_i \dot{x}_i^2 + \frac{e}{c}\sum_i A_i\left(\mathbf{x}\right)\dot{x}_i$$

נפעיל הזזה בזמן:

$$t \mapsto t + \delta t = t + \varepsilon$$

הלגרנג'יאן עדיין אינו תלוי ישירות בזמן ולכן הוא נשמר. מטען נתר הוא:

$$\begin{aligned}
Q &= \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_k}\dot{x}_k - \mathcal{L} \\
&= \sum_k \frac{\partial}{\partial \dot{x}_k}\left(\frac{1}{2}m\sum_i \dot{x}_i^2 + \frac{e}{c}\sum_i A_i\left(\mathbf{x}\right)\dot{x}_i\right)\dot{x}_k - \left(\frac{1}{2}m\sum_i \dot{x}_i^2 + \frac{e}{c}\sum_i A_i\left(\mathbf{x}\right)\dot{x}_i\right) \\
&= \sum_k \left(m\dot{x}_k + \frac{e}{c}A_k\left(\mathbf{x}\right)\right)\dot{x}_k - \frac{1}{2}m\sum_i \dot{x}_i^2 - \frac{e}{c}\sum_i A_i\left(\mathbf{x}\right)\dot{x}_i \\
&= \sum_k m\dot{x}_k^2 + \sum_k \frac{e}{c}A_k\left(\mathbf{x}\right)\dot{x}_k - \frac{1}{2}m\sum_i \dot{x}_i^2 - \frac{e}{c}\sum_i A_i\left(\mathbf{x}\right)\dot{x}_i \\
&= m\sum_i \dot{x}_i^2 + \frac{e}{c}\mathbf{A}\cdot\dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2}m\sum_i \dot{x}_i^2 - \frac{e}{c}\mathbf{A}\cdot\dot{\mathbf{x}} \\
&= \frac{1}{2}m\sum_i \dot{x}_i^2
\end{aligned}$$

ואנו רואים כי האנרגיה הקינטית עדיין נשמרת.

סעיף ד'

הניחו שהפונקציה A_i תלויה באופן מפורש בזמן: $A_i = A_i\left(t, \mathbf{x}\right)$. איך יראו משוואות אוילר־לגרנג' כעת? האם האנרגיה נשמרת?

תשובה

בפיתוח מהסעיף הקודם, השתמשנו בעובדה ש־A_i אינה תלויה במפורש בזמן רק בעת הגזירה השלמה לפי הזמן. נחזור שוב על הגזירה, והפעם תתווסף גם גזירה חלקית לפי הזמן:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{e}{c}A_k\left(\mathbf{x}\right)\right) &= \frac{e}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(A_k\left(\mathbf{x}\right)\right) \\
&= \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_k}{\partial t} + \sum_i \dot{x}_i\frac{\partial A_k}{\partial x_i}\right) \\
&= \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_k}{\partial t} + \left(\dot{\mathbf{x}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)A_k\right) \\
&= \frac{e}{c}\frac{\partial A_k}{\partial t} + \frac{e}{c}\left(\dot{\mathbf{x}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)A_k \\
&= -eE_k + \frac{e}{c}\left(\dot{\mathbf{x}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)A_k
\end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בהגדרה:

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial A_k}{\partial t} = E_k$$

מכאן, משוואות אוילר־לגרנג' יהיו (ברישום וקטורי):

$$\frac{e}{c}\boldsymbol{\nabla}\left(\mathbf{A}\cdot\dot{\mathbf{x}}\right)=m\ddot{\mathbf{x}}-e\mathbf{E}+\frac{e}{c}\left(\dot{\mathbf{x}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\mathbf{A}$$

לאחר העברת אגפים וחזרה על הפיתוח מסעיף ב' נקבל:

$$\mathbf{F}=e\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\dot{\mathbf{x}}\times\mathbf{B}\right)$$

זהו כוח לורנץ, כאשר הפעם נכלל גם השדה החשמלי.

כדי לבדוק אם האנרגיה עדיין נשמרת, נבצע הזזה בזמן $t\mapsto t+\delta t$. הלגרנג'יאן הוא הפעם:

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}m\sum_i\dot{x}_i^2+\frac{e}{c}\sum_i A_i\left(t,\mathbf{x}\right)\dot{x}_i$$

הווריאציה עליו היא:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}&=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}\delta t\\&=\left(\frac{e}{c}\sum_i\frac{\partial A_i}{\partial t}\dot{x}_i\right)\delta t\\&=\left(-e\sum_i E_i\dot{x}_i\right)\delta t\\&=-e\left(\sum_i E_i\dot{x}_i\right)\delta t\\&=-e\left(\mathbf{E}\cdot\dot{\mathbf{x}}\right)\delta t\end{aligned}$$

ואנו רואים כי היא לא (בהכרח) מתאפסת. לכן האנרגיה אינה נשמרת. (אם הפוטנציאל הווקטורי משתנה בזמן, חייב להיות כוח חיצוני שמשנה אותו ובכך גם משנה את האנרגיה במערכת.)

סעיף ה'

עבור המקרה:

$$A_i\left(\mathbf{x}\right)=\varepsilon_{ilm}\beta_l x_m$$

רשמו את הווריאציה על הלגרנג'יאן תחת טרנספורמציית סיבוב. יש להשתמש בזהות $\varepsilon_{abc}\varepsilon_{ade}=\delta_{bd}\delta_{ce}-\delta_{be}\delta_{cd}$.

תשובה

בסעיף זה נשתמש בכלל הסכימה של איינשטיין. נשים לב כי כאן שוב הפונקציה A_i אינה תלויה מפורשות בזמן. נפעיל טרנספורמציית סיבוב:

$$\delta x_k=\varepsilon_{kbc}\alpha_b x_c,\qquad\delta\dot{x}_k=\varepsilon_{kbc}\alpha_b\dot{x}_c$$

כאשר כזכור $\boldsymbol{\alpha}=\delta\theta\hat{\mathbf{n}}$. את הלגרנג'יאן נרשום כך:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}&=\frac{1}{2}m\dot{x}_i\dot{x}_i+\frac{e}{c}A_i\left(\mathbf{x}\right)\dot{x}_i\\&=\frac{1}{2}m\dot{x}_i\dot{x}_i+\frac{e}{c}\varepsilon_{ilm}\beta_l x_m\dot{x}_i\end{aligned}$$

(הביטוי $\varepsilon_{ilm}\beta_l x_m \dot{x}_i$ כולל כמובן סכימה על שלושת האינדקסים i,l,m). הווריאציה על הלגרנג'יאן תהיה:

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_k}\delta x_k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_k}\delta\dot{x}_k \\
&= \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}_i\dot{x}_i + \frac{e}{c}\varepsilon_{ilm}\beta_l x_m\dot{x}_i\right)\varepsilon_{kbc}\alpha_b x_c + \frac{\partial}{\partial\dot{x}_k}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}_i\dot{x}_i + \frac{e}{c}\varepsilon_{ilm}\beta_l x_m\dot{x}_i\right)\varepsilon_{kbc}\alpha_b\dot{x}_c \\
&= \left(\frac{e}{c}\varepsilon_{ilm}\beta_l\frac{\partial x_m}{\partial x_k}\dot{x}_i\right)\varepsilon_{kbc}\alpha_b x_c + \left(\frac{1}{2}m\left(\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial\dot{x}_k}\dot{x}_i + \dot{x}_i\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial\dot{x}_k}\right) + \frac{e}{c}\varepsilon_{ilm}\beta_l x_m\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial\dot{x}_k}\right)\varepsilon_{kbc}\alpha_b\dot{x}_c \\
&= \left(\frac{e}{c}\varepsilon_{ilm}\beta_l\delta_{mk}\dot{x}_i\right)\varepsilon_{kbc}\alpha_b x_c + \left(m\delta_{ik}\dot{x}_i + \frac{e}{c}\varepsilon_{ilm}\beta_l x_m\delta_{ik}\right)\varepsilon_{kbc}\alpha_b\dot{x}_c \\
&= \frac{e}{c}\varepsilon_{ilm}\varepsilon_{kbc}\delta_{mk}\alpha_b\beta_l x_c\dot{x}_i + m\varepsilon_{kbc}\delta_{ik}\alpha_b\dot{x}_i\dot{x}_c + \frac{e}{c}\varepsilon_{ilm}\varepsilon_{kbc}\delta_{ik}\alpha_b\beta_l x_m\dot{x}_c \\
&= \frac{e}{c}\varepsilon_{ilm}\varepsilon_{mbc}\alpha_b\beta_l x_c\dot{x}_i + m\varepsilon_{ibc}\alpha_b\dot{x}_i\dot{x}_c + \frac{e}{c}\varepsilon_{ilm}\varepsilon_{ibc}\alpha_b\beta_l x_m\dot{x}_c \\
&= \frac{e}{c}\varepsilon_{mil}\varepsilon_{mbc}\alpha_b\beta_l x_c\dot{x}_i + \frac{e}{c}\varepsilon_{ilm}\varepsilon_{ibc}\alpha_b\beta_l x_m\dot{x}_c + m\varepsilon_{ibc}\alpha_b\dot{x}_i\dot{x}_c \\
&= \frac{e}{c}\varepsilon_{ABC}\varepsilon_{ADE}\alpha_D\beta_C x_E\dot{x}_B + \frac{e}{c}\varepsilon_{ABC}\varepsilon_{ADE}\alpha_D\beta_B x_C\dot{x}_E + m\varepsilon_{ibc}\alpha_b\dot{x}_i\dot{x}_c \\
&= \frac{e}{c}\varepsilon_{ABC}\varepsilon_{ADE}\alpha_D\left(\beta_C x_E\dot{x}_B + \beta_B x_C\dot{x}_E\right) + m\varepsilon_{ibc}\alpha_b\dot{x}_i\dot{x}_c \\
&= \frac{e}{c}\left(\delta_{BD}\delta_{CE} - \delta_{BE}\delta_{CD}\right)\alpha_D\left(\beta_C x_E\dot{x}_B + \beta_B x_C\dot{x}_E\right) + m\varepsilon_{ibc}\alpha_b\dot{x}_i\dot{x}_c \\
&= \frac{e}{c}\left[\delta_{BD}\delta_{CE}\alpha_D\left(\beta_C x_E\dot{x}_B + \beta_B x_C\dot{x}_E\right) - \delta_{BE}\delta_{CD}\alpha_D\left(\beta_C x_E\dot{x}_B + \beta_B x_C\dot{x}_E\right)\right] + m\varepsilon_{ibc}\alpha_b\dot{x}_i\dot{x}_c \\
&= \frac{e}{c}\left[\delta_{CE}\alpha_B\left(\beta_C x_E\dot{x}_B + \beta_B x_C\dot{x}_E\right) - \delta_{BE}\alpha_C\left(\beta_C x_E\dot{x}_B + \beta_B x_C\dot{x}_E\right)\right] + m\varepsilon_{ibc}\alpha_b\dot{x}_i\dot{x}_c \\
&= \frac{e}{c}\left[\alpha_B\left(\beta_C x_C\dot{x}_B + \beta_B x_C\dot{x}_C\right) - \alpha_C\left(\beta_C x_B\dot{x}_B + \beta_B x_C\dot{x}_B\right)\right] + m\varepsilon_{ibc}\alpha_b\dot{x}_i\dot{x}_c \\
&= \frac{e}{c}\left(\alpha_B\beta_C x_C\dot{x}_B + \alpha_B\beta_B x_C\dot{x}_C - \alpha_C\beta_C x_B\dot{x}_B - \alpha_C\beta_B x_C\dot{x}_B\right) + m\varepsilon_{ibc}\alpha_b\dot{x}_i\dot{x}_c \\
&= \frac{e}{c}\left(\alpha_i\beta_j x_j\dot{x}_i + \alpha_i\beta_i x_j\dot{x}_j - \alpha_i\beta_i x_j\dot{x}_j - \alpha_i\beta_j x_i\dot{x}_j\right) + m\varepsilon_{ibc}\alpha_b\dot{x}_i\dot{x}_c \\
&= \frac{e}{c}\left(\alpha_i\beta_j x_j\dot{x}_i - \alpha_i\beta_j x_i\dot{x}_j\right) + m\varepsilon_{abc}\alpha_b\dot{x}_a\dot{x}_c \\
&= \frac{e}{c}\left(\alpha_i\dot{x}_i\beta_j x_j - \alpha_i x_i\beta_j\dot{x}_j\right) - m\varepsilon_{iab}\alpha_i\dot{x}_a\dot{x}_b \\
&= \frac{e}{c}\left[\left(\alpha_i\dot{x}_i\right)\left(\beta_j x_j\right) - \left(\alpha_i x_i\right)\left(\beta_j\dot{x}_j\right)\right] - m\varepsilon_{iab}\alpha_i\dot{x}_a\dot{x}_b
\end{aligned}
$$

כדי להמיר את התוצאה לכתיב וקטורי נשתמש בזהויות:

$$\varepsilon_{iab}A_iB_aC_b = \mathbf{A}\cdot\left(\mathbf{B}\times\mathbf{C}\right), \qquad A_iB_i = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$$

וכך נקבל:

$$
\begin{aligned}
\partial\mathcal{L} &= \frac{e}{c}\left[\left(\boldsymbol{\alpha}\cdot\dot{\mathbf{x}}\right)\left(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{x}\right) - \left(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x}\right)\left(\boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\mathbf{x}}\right)\right] - m\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(\dot{\mathbf{x}}\times\dot{\mathbf{x}}\right) \\
&= \frac{e}{c}\left[\left(\boldsymbol{\alpha}\cdot\dot{\mathbf{x}}\right)\left(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{x}\right) - \left(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x}\right)\left(\boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\mathbf{x}}\right)\right]
\end{aligned}
$$

סעיף ו'

מהו התנאי על $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ כדי שהטרנספורמציה תהיה סימטריה? מהי הסיטואציה הפיזיקלית?

תשובה

נרשום את הווריאציה על הלגרנג'יאן כך:

$$\begin{aligned}
\partial\mathcal{L} &= \frac{e}{c}\left[(\boldsymbol{\alpha}\cdot\dot{\mathbf{x}})(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{x}) - (\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x})(\boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\mathbf{x}})\right] \\
&= \frac{e}{c}\left[\alpha\dot{x}\cos\theta_{\alpha\dot{x}}\beta x\cos\theta_{\beta x} - \alpha x\cos\theta_{\alpha x}\beta\dot{x}\cos\theta_{\beta\dot{x}}\right] \\
&= \frac{e}{c}\left[\alpha\beta x\dot{x}\cos\theta_{\alpha\dot{x}}\cos\theta_{\beta x} - \alpha\beta x\dot{x}\cos\theta_{\alpha x}\cos\theta_{\beta\dot{x}}\right] \\
&= \frac{e}{c}\alpha\beta x\dot{x}\left[\cos\theta_{\alpha\dot{x}}\cos\theta_{\beta x} - \cos\theta_{\beta\dot{x}}\cos\theta_{\alpha x}\right]
\end{aligned}$$

כדי שהווריאציה תתאפס, נדרוש:

$$\begin{aligned}
&\cos\theta_{\alpha\dot{x}}\cos\theta_{\beta x} = \cos\theta_{\beta\dot{x}}\cos\theta_{\alpha x} \\
\Rightarrow &\frac{\cos\theta_{\alpha\dot{x}}}{\cos\theta_{\beta\dot{x}}} = \frac{\cos\theta_{\alpha x}}{\cos\theta_{\beta x}}
\end{aligned}$$

תנאי זה מתקיים אם הזוויות בין $\boldsymbol{\alpha}$ ל־$\mathbf{x}$ ול־$\dot{\mathbf{x}}$ שוות לזוויות בין $\boldsymbol{\beta}$ ל־$\mathbf{x}$ ול־$\dot{\mathbf{x}}$ בהתאמה. במלים אחרות, הווקטורים $\boldsymbol{\alpha}$ ו־$\boldsymbol{\beta}$ מצביעים לאותו כיוון. מאחר ש־$\boldsymbol{\alpha} = \delta\theta\hat{\mathbf{n}}$ הוא בכיוון ציר הסיבוב, נסיק כי גם על הווקטור $\boldsymbol{\beta}$ להיות בכיוון ציר הסיבוב. נזכור כי $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ הוא הפוטנציאל הווקטורי. ההגדרה $A_i(\mathbf{x}) = \varepsilon_{ilm}\beta_l x_m$ בסעיף הקודם משמעותה:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\beta}\times\mathbf{x}$$

כלומר הפוטנציאל הווקטורי מאונך לציר הסיבוב ולווקטור המיקום בכל נקודה.